
Experimentelle Untersuchungen und Materialmodellierung zur Berechnung von Klebverbindungen

Michael Schlimmer
Institut für Werkstofftechnik
Universität Kassel
Deutschland

Abstract

Im vorliegenden Beitrag wird ein materialkonsistentes mathematisches Modell für isotrope, plastisch kompressible Klebschichten mit Berücksichtigung des Dehnrateneinflusses und der Entfestigung vorgestellt. Das Modell wurde aus einer zunächst intensiven experimentellen Beobachtung des Klebschichtverhaltens in speziellen Klebverbindungen und aufbauend auf einer Plastizitätstheorie für plastisch kompressible Werkstoffe entwickelt und steht für die Implementierung in FE-Programme zur Verfügung.

A Einachsige Grundversuche

1. Quasistatische Grundversuche am stumpf geklebten Rohr, sog. Doppelrohrprobe
2. Experimentelle Ergebnisse aus bisherigen quasistatischen Versuchen
3. Allgemeine Formulierung der Spannung – Deformation – Zusammenhänge
4. Additiver AVRAMI-Ansatz für die Gesamtdeformation bei quasistatischer Beanspruchung
5. Zerlegung der Gesamtdeformation
6. Entfestigung und Nachfestigkeitsverhalten
7. Zusammenstellung der Spannung – Deformationsbeziehungen
8. Bestimmung der Querzahl

B Deformationsratenabhängigkeit

9. KELVIN / VOGT - Modell für die Gesamtdeformation
10. Deformationsraten abhängige Fließkurve bei fehlenden experimentellen Spannung – Verformung – Zusammenhängen

C Mehrachsige Beanspruchung

11. Festigkeitshypothese bei dynamischer Beanspruchung
12. Deformationskriterium
13. Vergleichsschubspannung – Vergleichsgleitung
14. Plastische Vergleichsdehnung bei Bruch - Vergleich mit dem JOHNSON-COOK-Modell

D Literatur

Keywords

Klebverbindung, Grundversuche, Materialmodelle für Kurzzeitbeanspruchung

A Einachsige Grundversuche

1. Quasistatische Grundversuche am stumpf geklebten Rohr, sog. „Doppelrohrprobe“

Für experimentelle Untersuchungen an Klebschichten in Klebverbindungen eignen sich hervorragend die sog Doppelrohrprobe nach ISO 11003-1 und DIN EN 14869-1 bzw. Versuche in Anlehnung an diese Normen. Zur Grundcharakterisierung des Klebstoffs in der Verbindung werden quasistatische Versuche durchgeführt unter Torsions- und Zugbeanspruchung sowie unter einer Kombination aus beiden Beanspruchungsarten. Die Versuche werden im Institut für Werkstofftechnik der Universität Kassel geschwindigkeitsgeregelt mit folgenden Bedingungen durchgeführt:

$$\begin{aligned} \tau - \gamma & \text{ mit } \dot{\gamma} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}, \\ \sigma - \varepsilon & \text{ mit } \dot{\varepsilon} = 10^{-3} \text{ s}^{-1}. \end{aligned}$$

Wegen der Querdehnungsbehinderung ($\varepsilon = \varepsilon_x$, $\varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$), die sich infolge der dünnen, vollständig an den im Vergleich zum Klebstoff starren Stahl- oder Aluminiumfügeteilen haftenden Klebschicht einstellt, erhält man aus den Ursprungsgeraden der gemessenen Spannung – Verformung – Kurven die elastischen Konstanten der Schicht (s. Gl. (7.11))

$$G, E^*, \nu \Rightarrow G, E, \nu,$$

den Fließbeginn („Knie“)

$$\tau_F, \gamma_F; \sigma_F, \varepsilon_F$$

und das Spannungsmaximum $\tau_u, \gamma_u; \sigma_u, \varepsilon_u$.

$\sigma, \tau, \varepsilon, \gamma$ sind wahre Größen und ε, γ darüber hinaus Gesamtdeformationen, die sich aus elastischen und plastischen Anteilen zusammensetzen sollen.

2. Experimentelle Ergebnisse aus bisherigen quasistatischen Versuchen

Ergebnisse aus Versuchen mit der Doppelrohrprobe sind für den Klebstoff Betamate 1496 V in den Bildern 2-1 bis 2-4 dargestellt.

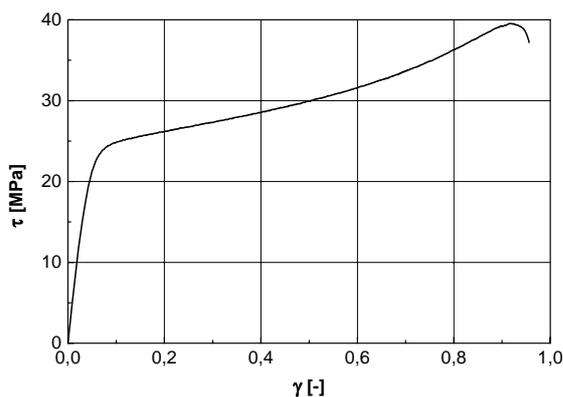


Bild 2-1: Torsionsversuch

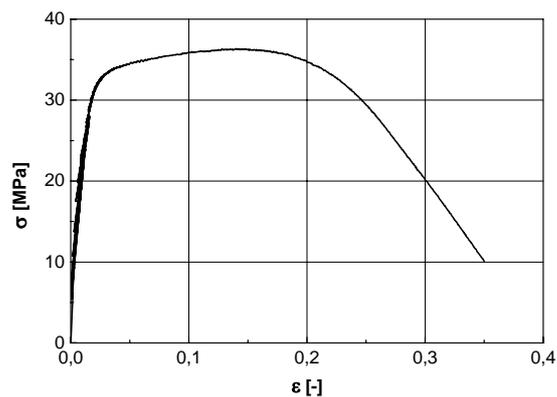


Bild 2-2: Zugversuch

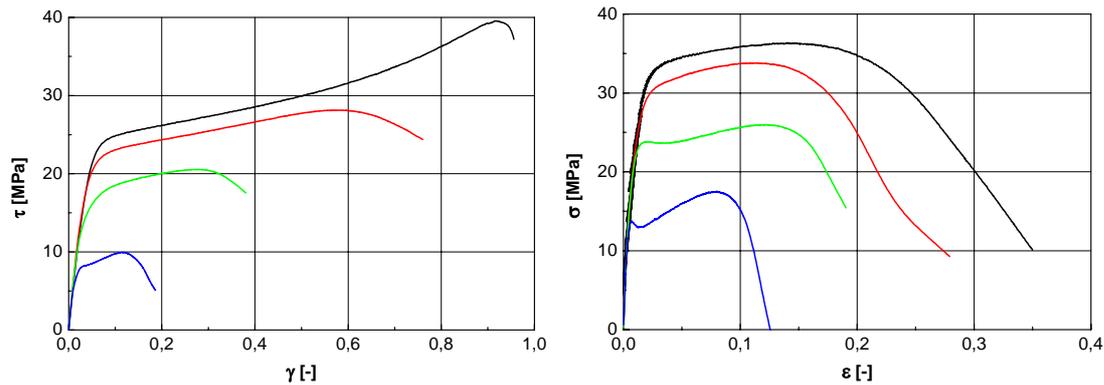


Bild 2-3: Torsionsversuch, Zugversuch sowie kombinierte Beanspruchungen

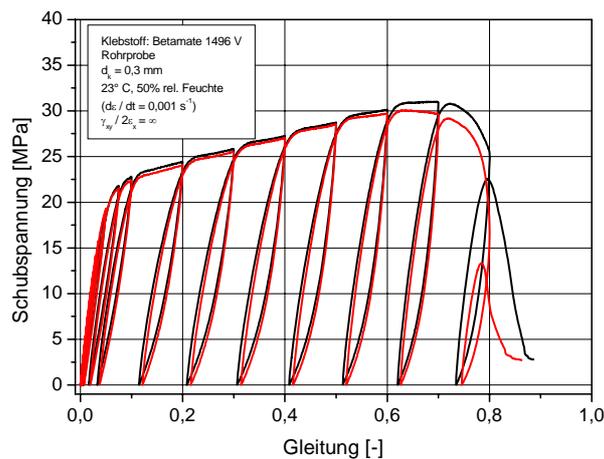


Bild 2-4: Torsionsversuch mit Be- und Entlastungswechsel

3. Allgemeine Formulierung der Spannung – Deformation -Zusammenhänge

Die Form der Funktion zur Formulierung des Spannung – Deformation – Zusammenhang soll für die Variablen τ, γ bzw. σ, ε (im Folgenden nur noch $\tau - \gamma$ – Betrachtung, Formulierung für $\sigma - \varepsilon$ entsprechend) explizit definiert sein, d.h. in der Form

$$y = f(x). \quad (3.1)$$

Je nach Anwendung eignet sich für die Versuchsdurchführung und -auswertung sowie für die numerische Berechnung die Funktion

$$\tau = f(\gamma) \quad (3.2)$$

oder die Funktion

$$\gamma = f(\tau). \quad (3.3)$$

Für elastoplastische Materialien lässt sich die Gesamtdeformation additiv und im Rahmen der Theorie finiter Deformationen auch multiplikativ zerlegen. Im Folgenden soll nur die additive Zerlegung

$$\gamma = \gamma_e + \gamma_p \quad (3.4)$$

verfolgt werden. Experimentell kann die additive Zerlegung durch Be- und Entlastungsbeanspruchung überprüft werden (Bilder 2-5 und 2-6).

Bei dynamischer Beanspruchung gelingt diese Versuchsdurchführung nicht. Zur Berücksichtigung der Dehn-(Deformations-)ratenabhängigkeit muss deshalb von den Gesamtdeformationen ausgegangen werden.

4. Additiver AVRAMI – Ansatz für Gesamtdeformation bei quasistatischer Beanspruchung

Für die Beanspruchung $\tau \leq \tau_u$ unterhalb des Spannungsmaximums lautet der sog. additive AVRAMI - Ansatz

$$\tau = B_0 \gamma + B_1 [1 - \exp(-k \gamma)] \quad (4.1)$$

B_0 , B_1 und k sind Ansatzfreiwerte, die mit entsprechender „Fitting-Technik“ aus experimentellen Ergebnissen bestimmt werden können.

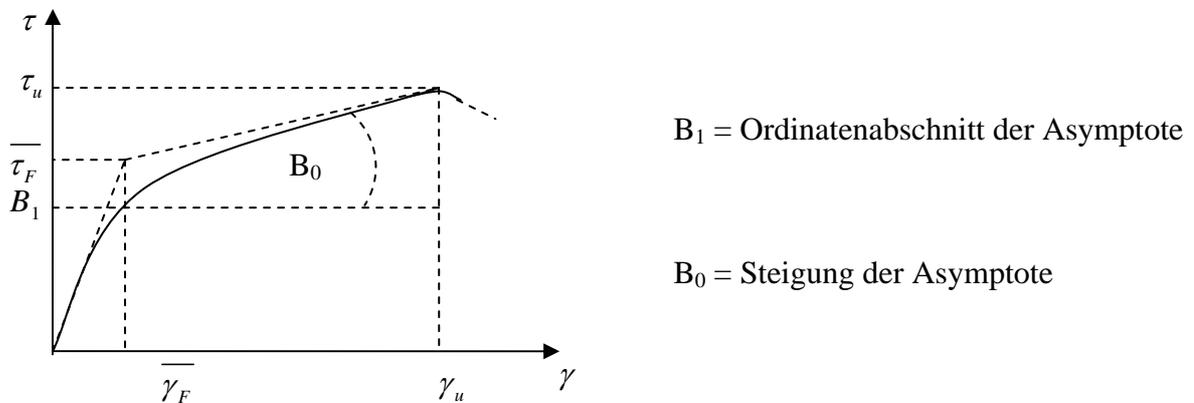


Bild 4- 1: Schematische Darstellung des additiven AVRAMI - Ansatzes

Aus den experimentellen Ergebnissen (s. Ziff.2) ist die maximal ertragbare Spannung τ_u durch die Tangente

$$\left(\frac{d\tau}{d\gamma} \right)_{\tau=\tau_u} = 0 \quad (4.2)$$

an die gemessene $\tau - \gamma$ - Kurve eindeutig zu bestimmen. Schwieriger ist die Festlegung der dazugehörigen Gleitung γ_u . Ebenfalls nicht eindeutig können aus der gemessenen Kurve der Schubmodul G (Ursprungsmodul) und der Fließbeginn, der durch (τ_F, γ_F) gekennzeichnet ist, bestimmt werden. Aus Gl. (4.1) erhält man die Steigung der Kurve im Ursprung zu

$$\left(\frac{d\tau}{d\gamma} \right)_{\gamma=0} = B_0 + k B_1 := G . \quad (4.3)$$

Die nach Gl.(4.3) rechnerisch bestimmte Ursprungtangente liefert den Schubmodul G . Der Schnittpunkt von G mit der Asymptote von Gl. (4.1) wird als (rechnerischer) Fließbeginn definiert:

$$\overline{\tau}_F = \frac{B_1}{1 - B_0/G} \quad (4.4a)$$

$$\overline{\gamma}_F = \frac{\overline{\tau}_F}{G} . \quad (4.4b)$$

Aus der aus dem Torsionsversuch mit der Doppelrohrprobe analog aufgenommenen Moment – Verdrehung – Kurve erhält man somit über ein einfaches Rechenschema die Kennwerte bei quasistatischer Beanspruchung

$$G; \overline{\tau}_F, \overline{\gamma}_F; \tau_u, \gamma_u,$$

die als Grundlage für die weiteren Ansätze dienen werden. Die gleiche Prozedur wird auch für die Ergebnisse aus quasistatischer Zugbeanspruchung der geklebten Doppelrohrprobe beschrieben (s. Ziff. 2). Mit diesen experimentell bestimmten und mechanisch belegten Kennwerten sollen die Ansatzfreiwerte bzw. Modellparameter der für die Berechnung notwendigen mathematischen Modelle bestimmt werden. Diese so identifizierten Parameter erreichen gegenüber der numerischen Identifikation einen höhern Grad der Plausibilität und erlauben eine zumindest quasi-physikalisch begründete Bewertung ihrer numerischen Größen.

5. Zerlegung der Gesamtdeformation

Zur numerischen elastoplastischen Berechnung von Spannung - Verformung - Zuständen in Bauteilen mit der FEM benötigt man bei Anwendung der aus der Plastizitätstheorie stammenden „Deformationszuwachstheorie“ (Schlimmer 2003 [4]) die elastischen und plastischen Anteile der Gesamtdeformation getrennt von einander. Für einen strukturell stabilen, d.h. ohne Schädigung in weitesten Sinne,

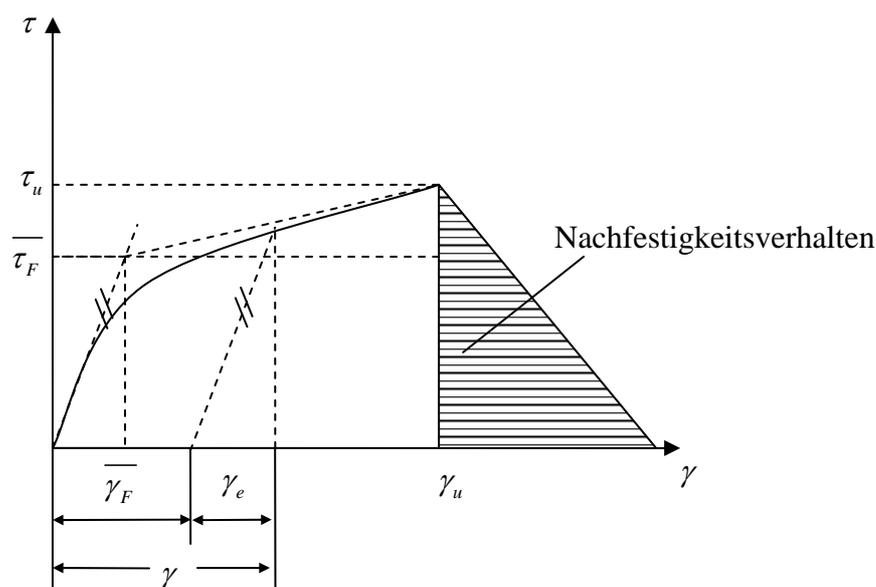


Bild 5-1: Schubspannung – Gleitung – Verlauf eines elastoplastischen Werkstoffs mit linearem Nachfestigungsverhalten

und damit auch mechanisch stabilen Werkstoff folgt bei Entlastung von einer Beanspruchung τ der Spannung - Verformung - Verlauf einer zum Ursprungsmodul G parallelen Geraden (Bild 5-1).

Durch viskoses Werkstoff- bzw. Klebstoffverhalten verursachte Hysteresen (Bild 2-6) und das Nachfestigungsverhalten (Bild 5-1) bleiben an dieser Stelle noch unberücksichtigt.

Aus Gl. (3.4) folgt

$$\gamma_p = \gamma - \gamma_e \quad (5.1)$$

und mit einer „halbnnumerischen“ Bestimmung entsprechend dem Schema nach

Tabelle 5/1 erhält man den plastischen Deformationsanteil γ_p .

Tabelle 5/1: Punktweise Bestimmung der plastischen Verformungsanteile

Messung		Rechnung	
τ	γ	$\gamma_e = \tau/G$	γ_p
τ_1	γ_1	γ_{e1}	γ_{p1}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
τ_u	γ_u	γ_{eu}	γ_{pu}

Aus den Ergebnissen nach

Tabelle 5/1 kann das $\tau - \gamma_p$ -Diagramm erstellt werden (Bild 5-2).

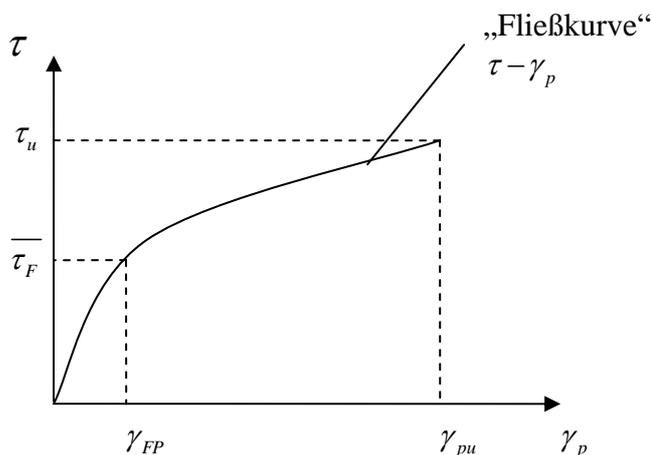


Bild 5-2: Plastische Deformation in Abhängigkeit von der Schubspannung, sog. Fließkurve

Da G eine Ursprungsgerade darstellt und die Messung der $\tau - \gamma$ - Kurve für kleinste Deformationen eine Frage der Messgenauigkeit ist, beginnt die nach Tabelle 5/1 bestimmte „Fließkurve“ im Koordinatenursprung und nicht bei τ_F . Somit entsteht bei „Fließbeginn“ τ_F eine plastische (bleibende) Deformation γ_{FP} . Ein Vergleich mit der Dehngrenze $R_{P0,2}$ bei metallischen Werkstoffen ohne ausgeprägte Fließgrenze bietet sich an.

Unter der Voraussetzung, dass $\gamma_{FP} \ll \gamma_{pu}$ ist, wird $\gamma_{FP} \approx 0$; wenn die Voraussetzung nicht zutrifft, dann muss die plastische Deformation nach

$$\gamma_{p\text{kor}} = \gamma_p - \gamma_{FP} \quad (5.2)$$

korrigiert werden. Dies kann gemäß Bild 5-2, aber auch „halbnnumerisch“ über die Gln. (4.1), (4.3) und (5.1) vorgenommen werden. Mit Gl. (5.2) erhält man dann ein „korrigiertes“ Diagramm mit entsprechender Fließkurve für das weitere Vorgehen (Bild 5-3).

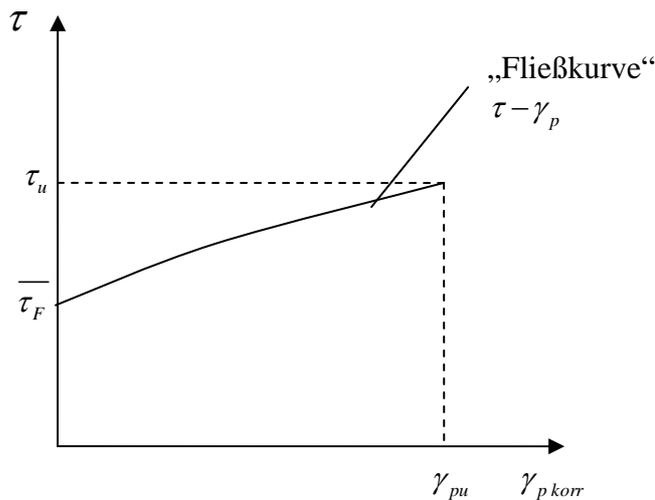


Bild 5- 3: Korrigierte Fließkurve

Die Formulierung der korrigierten Fließkurve soll ebenfalls über eine AVRAMI -Funktion vorgenommen werden:

$$\tau - \overline{\tau}_F = K \left[1 - \exp(-\kappa \gamma_{p\text{kor}}) \right] \quad (5.3)$$

Der Werkstoff bzw. Klebstoff verfestigt sich gemäß Gl.(5.4) für $\kappa \neq 0$ bis

$$\gamma_{p\text{kor}} = \infty \quad (5.4)$$

Er zeigt der Deformation einen Widerstand, der durch

$$R = \tau - \overline{\tau}_F \quad (5.5)$$

ausgedrückt werden kann (z. B. gemäß CHABOCHE [5]).

Für die weitere Betrachtung wird die Fließkurve deshalb statt mit Gl.(5.3) durch

$$R = R_\infty \left[1 - \exp(-\kappa \gamma_{p\text{kor}}) \right] \quad (5.6)$$

dargestellt.

R ist die Spannungsdifferenz, die sich aus den Momenten bzw. Kräften und den entsprechenden ungeschädigten geometrischen Bezugsgrößen (Probenquerschnitt, Klebfläche) ergibt. Ist diese Bezugsgröße geschädigt, muss die effektive, wirksame Fläche eingesetzt werden. R ist damit eine effektive Größe:

$$R = R_{\text{eff}} \quad (5.7)$$

Gegenüber dieser Darstellung der Spannung – Deformation - Formulierung bietet sich für die Fließkurve auch der Potenzansatz an (Bild 3-1) [3]. Analog zu Gl. (5.3) lautet dieser

$$R = \tau - \overline{\tau}_F = k \gamma_{p\text{kor}}^n \quad (5.8)$$

mit n als Verfestigungsexponent und k als „plastischer Tangentenmodul“. Für $n = 1$ stellt sich das Spannung – Gesamtverformung - Diagramm als bilineare Funktion dar, die dem Schubspannung – Gleitung - Zusammenhang von BETAMATE 1496 recht nahe kommt (Bild 2-1). Für $n < 1$ liegt eine

degressive Verfestigung vor, wie man sie bei Metallen antrifft, für $n > 1$ ergibt sich dagegen eine progressive Verfestigung, die man von Polymeren und insbesondere von Elastomeren kennt.

In [3] wurden zur Formulierung des Klebstoffverhaltens im Zugscherversuch mit Berücksichtigung der Schädigung Gl. (6.4) eingeführt, die in Verbindung mit Gl. (5.8) zur plastischen Fließkurve

$$R = k\gamma_p^n \exp\left[-\alpha(\gamma_p - \gamma_k)^p\right] \quad (5.9)$$

führt, auf die in Ziff.6 weiter eingegangen wird.

6. Entfestigung und Nachfestigkeitsverhalten

Durch Einführung des Schädigungsparameters D nach KACHANOV und mit dem Deformationsäquivalenzprinzip (s. LEMAITRE / CHABOCHE [6]) erhält man allgemein die effektive Schubspannung

$$\tau_{eff} = \frac{\tau}{1-D} \quad (6.1)$$

bzw. den effektiven Widerstand

$$R_{eff} = \frac{R}{1-D}. \quad (6.2)$$

Für die Fließkurve wird der plastische Schädigungsparameter zunächst als Funktion der plastischen Gleitung angesetzt

$$D_p = D(\gamma_p), \quad \gamma_p := \gamma_{p,corr}$$

mit den plausiblen Grenzen

$$\gamma_p = 0 : D_p = 0; \quad \gamma_p \Rightarrow \infty : D_p = 1. \quad (6.3)$$

Für die Abhängigkeit des Schädigungsparameters von der plastischen Deformation lässt sich von einem auf die WEIBULLSche Überlebenswahrscheinlichkeit zurückgehender Ansatz (Schlimmer 1986 [3]) ausgehen:

$$D_p = 1 - \exp\left[-\alpha(\gamma_p - \gamma_k)^p\right]; \quad \gamma_p \geq \gamma_k, \quad (6.4)$$

mit der kritischen plastischen Verformung γ_k , unterhalb derer keine Schädigung auftritt. Mit Gl.(6.2) lautet dann die Fließkurve mit Berücksichtigung der Schädigung nach Gl.(6.4)

$$R = R_\infty \left[1 - \exp(-d_\gamma \gamma_p)\right] \exp\left[-\alpha(\gamma_p - \gamma_k)^p\right]. \quad (6.5)$$

Für den Fall, dass $\gamma_k = \gamma_{pu}$ gilt, nimmt d_γ in Gl.(6.5) den Wert von κ in Gl.(5.6) an.

Die weitere Betrachtung wird mit der vereinfachenden Annahme

$$p = 1, \quad \gamma_k = 0 \quad (6.6)$$

durch geführt. Die spezielle Fließkurve lautet dann

$$R = R_{\infty} \left[1 - \exp(-d_{\gamma} \gamma_p) \right] \exp(-\alpha \gamma_p). \quad (6.7)$$

Aus der „Höchstlastbedingung (Bild 6-1)

$$\left(\frac{dR}{d\gamma_p} \right)_{\gamma_p = \gamma_{pu}} = 0 \quad (6.8)$$

erhält man den Zusammenhang zwischen d_{γ} und α zu

$$\alpha = \frac{d_{\gamma}}{\exp(d_{\gamma} \gamma_{pu}) - 1} \quad (6.9)$$

und damit aus Gl.(6.7) für

$$R = R_u \quad \text{und} \quad \gamma_p = \gamma_{pu}$$

$$R_{\infty} = \frac{R_u \exp(\alpha \gamma_{pu})}{1 - \exp(-d_{\gamma} \gamma_{pu})}. \quad (6.10)$$

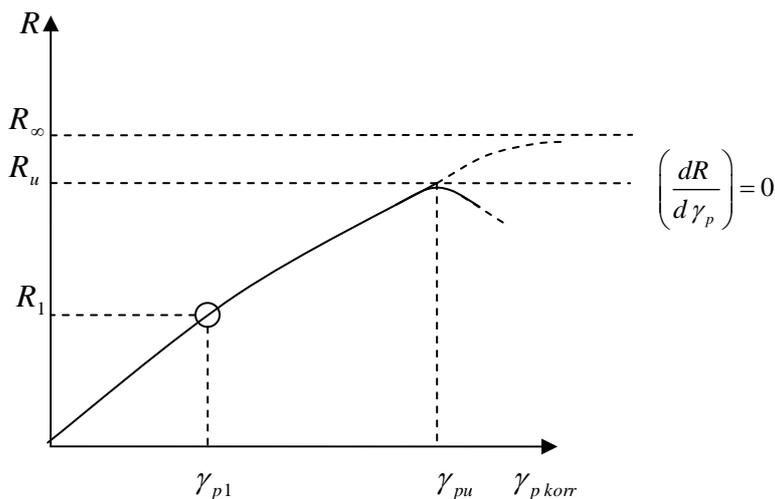


Bild 6- 1: Schematische Darstellung der Fließkurve mit Entfestigung

Mit den Gln.(6.9) und (6.10) folgt die Fließkurvenfunktion

$$R = R_u \exp \left[\frac{-d_{\gamma} (\gamma_p - \gamma_{pu})}{\exp(d_{\gamma} \gamma_{pu}) - 1} \right] \frac{1 - \exp(-d_{\gamma} \gamma_p)}{1 - \exp(-d_{\gamma} \gamma_{pu})}, \quad (6.11)$$

in der der Ansatzfreiwert d_{γ} als einzige Unbekannte noch zu bestimmen ist. Dazu kann man z.B. einen experimentellen Kurvenwert (R_1/γ_{p1}) unterhalb γ_{pu} verwenden, oder eine rechnerische Kurvenanpassung vornehmen. Für $\gamma_p = \gamma_{pu}$ folgt aus Gl.(6.11) $R = R_u$.

Bisher ist eine mögliche Änderung der Entlastungsgeraden (s. Bild 5-1) auf dem Weg zum Höchstlastpunkt und insbesondere darüber hinaus noch nicht berücksichtigt worden (Bild 6-2).

Über Gl.(6.1) und den linearelastischen Zusammenhang zwischen γ_e und τ findet man den bekannten Ansatz (KACHANOV; LEMAITRE, CHABOCHE, z.B. [5]) für den sog. Schadensmodul G_d

$$G_d = (1 - D_e)G \quad (6.12)$$

mit dem elastischen Schädigungsparameter D_e . Der Schadensmodul G_d kann experimentell durch Be- und Entlastungsbeanspruchung bestimmt werden. Dies gelingt jedoch nur unter quasistatischen Bedingungen (s. Ziff.3).

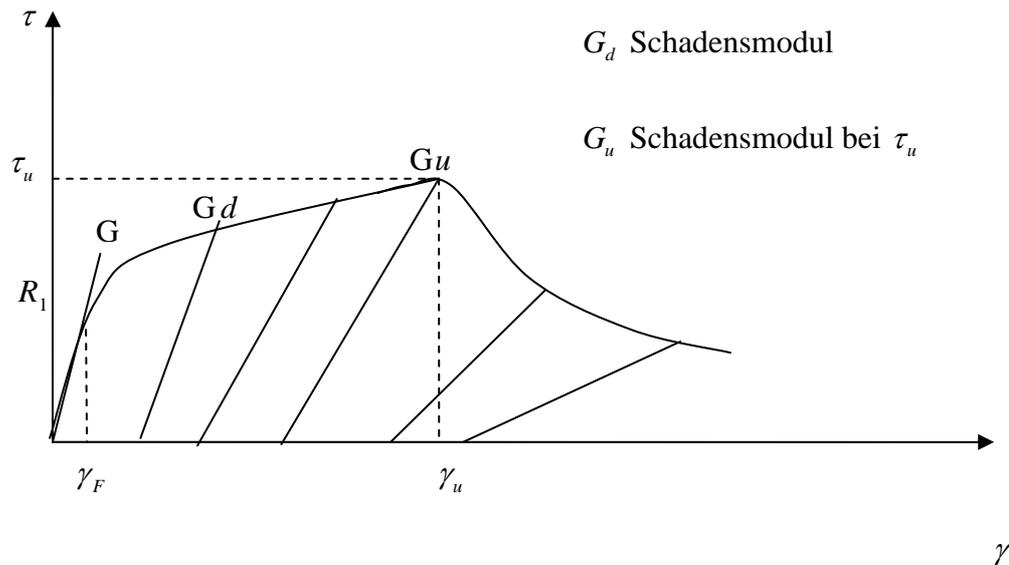


Bild 6-2: Deformationsabhängige Änderung der Steigung der Entlastungsgeraden

Eine einfache Annahme über die Änderung des Schadenmoduls G_d lautet:

$$\tau \leq \tau_u : G_d = G - (G - G_u) \frac{\tau}{\tau_u} \quad (6.13a)$$

$$\tau > \tau_u : G_d = G_u \frac{\tau}{\tau_u} \quad (6.13b)$$

mit G_u als Schadensmodul bei Entlastung von τ_u (Bild 6-2). Die elastischen Verformungen sind dann für

$$\gamma \leq \gamma_u : \gamma_e = \frac{\tau}{G - (G - G_u) \frac{\tau}{\tau_u}} \quad (6.14a)$$

und für

$$\gamma > \gamma_u : \gamma_e = \frac{\tau_u}{G} = konst.. \quad (6.14b)$$

Da bei dynamischer Beanspruchung G_u experimentell nicht bestimmt werden kann, wird (in Annäherung bzw. Übereinstimmung mit dem experimentellen Befund bei quasistatischer

Beanspruchung) weiterhin angenommen, dass für $\tau \leq \tau_u$ gilt: $G_u = G$, so dass statt Gl. (6.14)-a,b die elastischen Anteile der Gesamtdeformation lauten:

$$\gamma \leq \gamma_u : \quad \gamma_e = \frac{\tau}{G} \quad (6.15)a$$

$$\gamma > \gamma_u : \quad \gamma_e = \frac{\tau_u}{G} = \gamma_{eu} \cdot \quad (6.15)-b$$

Mit Gl. (6.15)b kann nun eine „Gesamtfließkurve“, die über γ_{pu} hinausgeht und damit das „Nachfestigungsverhalten“ berücksichtigt, aus den quasistatischen Ergebnissen gemäß Tabelle 5/1 für $\gamma \leq \gamma_u$ und darüber hinaus definiert werden. (Bild 6-2)

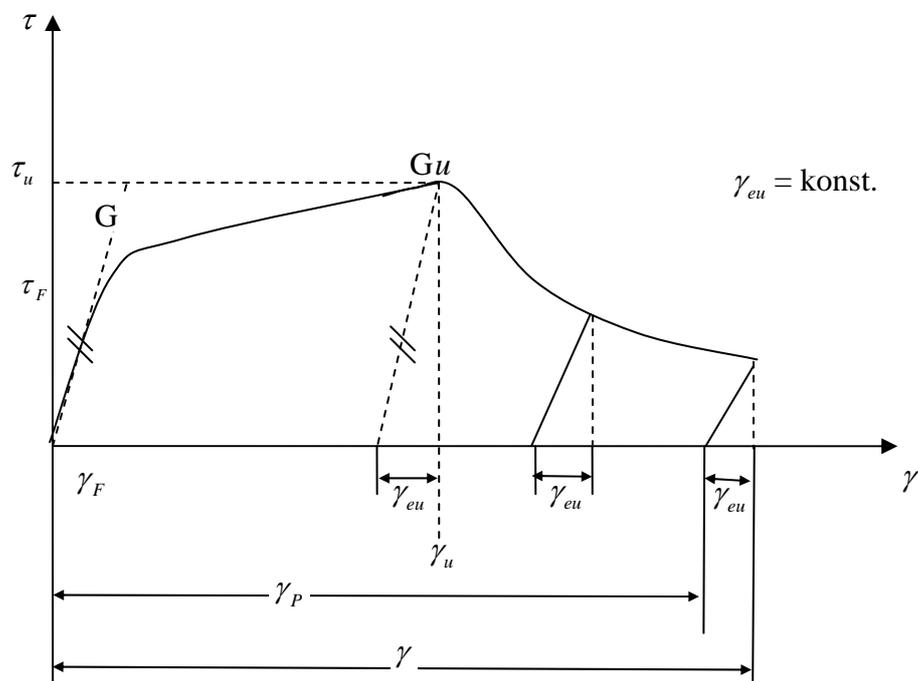


Bild 6-2: Schematisches Schubspannung – Gleitung – Diagramm mit Berücksichtigung der Schädigung

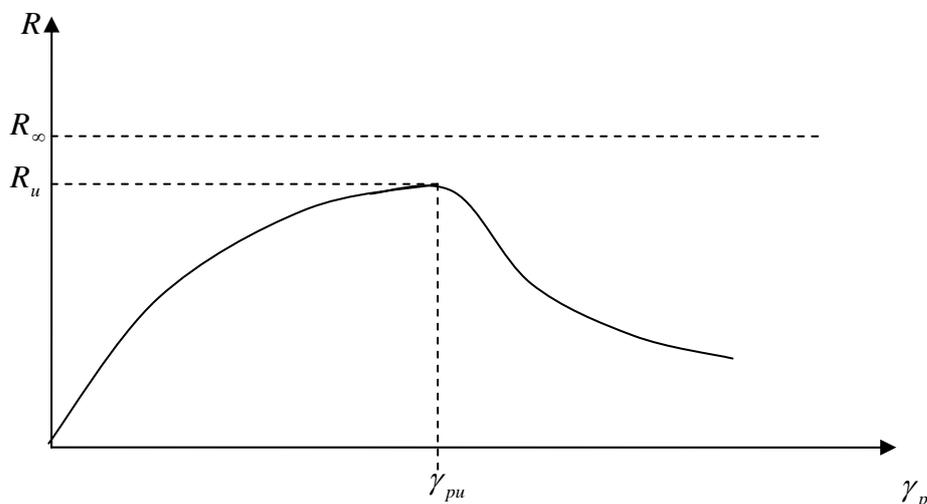


Bild 6. 3: Fließkurve mit Berücksichtigung der Schädigung

Aus der Auswertung gemäß Bild 6-2 erhält man die Darstellung von Bild 6-3 für die gesuchte Fließkurve.

Der plastische Verformungsanteil kann statt Gl. (6.5) durch den entsprechenden Potenzansatz für die Fließkurve nach Gl. (5.9) ausgedrückt werden. Für den einfachen Fall von Gl.(5.9) [3]

$$p = 1, \gamma_k = 0: R = k\gamma^n \exp(-\alpha \gamma) \quad (6.16)$$

erhält man über die Höchstlastbedingung

$$\left(\frac{dR}{d\gamma} \right)_{\gamma=\gamma_u} = 0 \quad (6.17)$$

den Zusammenhang

$$\alpha = n/\gamma_u \quad (6.18)$$

und durch Verknüpfung der Gln. (6.16) und (6.18)

$$k = R_u \left(\frac{e}{\gamma_u} \right)^n \quad (6.19)$$

Die auf dem einfachen Potenzansatz beruhende Fließkurve lautet damit

$$\frac{R}{R_u} = \left(\frac{\gamma}{\gamma_u} \right)^n \exp \left[n \left(1 - \frac{\gamma}{\gamma_u} \right) \right] \quad (6.20)$$

Für Zugbeanspruchung lautet die Fließkurve dann formal gleich, entsprechend der Vorgehensweise und Darstellung von Ziff. 7.

7. Zusammenstellung der Spannung- Deformation - Beziehungen

7.1 Zugversuch mit behinderter Querdehnung (einachsige Dehnung)

Spannung – Dehnung – Beziehung bei behinderter Querdehnung:

$$\sigma \leq \sigma_u : \quad \sigma = A_0 \varepsilon + A_1 \left[1 - \exp(-k_\varepsilon \varepsilon) \right] \quad (7.1)$$

Elastizitätsmodul bei behinderter Querdehnung (einachsiger Verzerrungszustand):

$$E^* = A_0 + k_\varepsilon A_1 \quad (7.2)$$

Rechnerische Fließgrenze:

$$\overline{\sigma}_F = \frac{A_1}{1 - \frac{A_0}{E^*}} \quad ; \quad \overline{\varepsilon}_F = \frac{\overline{\sigma}_F}{E^*} \quad (7.3)a,b$$

Aus den Versuchsdaten gewinnt man unmittelbar die Koordinaten des Höchstlastpunktes und durch die Kurvenanpassung folgen die Kennwerte nach Gl. (7.2) und (7.3) a,b, so dass insgesamt folgende Größen identifiziert sind:

$$E^* ; \overline{\sigma}_F, \overline{\varepsilon}_F, \overline{\sigma}_u, \overline{\varepsilon}_u . \quad (7.4)$$

Die Fließkurve erhält man nach Bestimmung der plastischen (bleibenden) Dehnung zu

$$R_\varepsilon = R_{\varepsilon\infty} \left[1 - \exp\left(-\kappa_\varepsilon \varepsilon_{p\text{kor}}\right) \right]. \quad (7.5)$$

Der zur Zugbeanspruchung gehörige plastische Schädigungsparameter lautet:

$$D_{\varepsilon p} = 1 - \exp\left[-\alpha_\varepsilon (\varepsilon_p - \varepsilon_k)^{p_\varepsilon}\right] \quad (7.6)$$

für $\varepsilon_p \geq \varepsilon_k$.

Damit wird zunächst ein zweiter Schädigungsparameter neben dem bei Schubbeanspruchung (Gl.(6.4)) eingeführt. Die Fließkurve bis zum Versagen der Proben lautet:

$$\sigma > \sigma_F : \frac{R_\varepsilon}{R_{\varepsilon u}} = \exp\left[\frac{-d_\varepsilon (\varepsilon_p - \varepsilon_{pu})}{\exp(d_\varepsilon \varepsilon_{pu}) - 1} \right] \frac{1 - \exp(-d_\varepsilon \varepsilon_p)}{1 - \exp(-d_\varepsilon \varepsilon_{pu})}. \quad (7.7)$$

Zur Berücksichtigung der Schädigung muss auch der elastische Anteil der Gesamtdehnung in Betracht gezogen werden:

$$D_{\varepsilon e} = 1 - \frac{E^*_d}{E^*}. \quad (7.8)$$

Unter gewissen Voraussetzungen (s. Zlff.6) folgen damit für

$$\varepsilon \leq \varepsilon_u : \quad \varepsilon_e = \frac{\sigma}{E^* - (E^* - E^*_u) \frac{\sigma}{\sigma_u}} \quad (7.9),a$$

und für

$$\varepsilon > \varepsilon_u : \quad \varepsilon_e = \frac{\sigma_u}{E^*}. \quad (7.9),b$$

Für den (experimentell annähernd bestätigten) Befund

$$E^*_u = E^*$$

folgen für

$$\varepsilon \leq \varepsilon_u : \quad \varepsilon_e = \frac{\sigma}{E^*} \quad (7.10)a$$

und für

$$\varepsilon > \varepsilon_u : \quad \varepsilon_e = \frac{\sigma_u}{E^*} = \varepsilon_{eu} \quad (7.10)b$$

Zur kompletten Beschreibung des gemessenen Spannung – Dehnung -Zusammenhangs bei quasistatischer Beanspruchung benötigt man die Kennwerte nach Gl. (7.4), die zum Teil aus den Parametern der Spannung – Dehnung - Kurve von Gl. (7.1) berechnet werden müssen und den

weiteren Parameter d_ε für die Fließkurve von Gl.(7.7). Insgesamt sind folgende Bestimmungsgrößen zu identifizieren:

Tabelle 7/ 1: Kennwerte aus Zugbeanspruchung

$$E^*; \overline{\sigma}_F, \overline{\varepsilon}_F; \overline{\sigma}_u, \overline{\varepsilon}_u; k_\varepsilon; d_\varepsilon$$

7.2 Schub- bzw. Torsionsversuch

Aus den entsprechenden Gln. (4.1), (4.3), (4.4)a,b, (5.6), (6.4), (6.11), und (6.15)a,b, ergeben sich die in Tabelle 7/2 zusammengestellten Bestimmungsgrößen:

Tabelle 7/ 2: Kennwerte aus Schub- bzw. Torsionsbeanspruchung

$$G; \overline{\tau}_F, \overline{\gamma}_F; \overline{\tau}_u, \overline{\gamma}_u; k_\gamma; d_\gamma$$

Zur mathematischen Beschreibung des elastoplastischen Verhaltens bzw. des „Fließverhaltens plastisch kompressibler Werkstoffe“ (Schlimmer 1974 | [1]) benötigt man die in den Tabellen 7/1 und 7/2 zusammengefassten Größen; darüber hinaus die Querzahlen (Schlimmer 2003 [4]) für den elastischen und den plastischen Anteil der Gesamtdeformation. Für die elastische Querzahl liefern die Moduln E^* bei behinderter Querdehnung (einachsiger Verzerrungszustand) und G den Zusammenhang

$$\nu_e = \frac{E^* - 2G}{2(E^* - G)}. \quad (7.11)$$

Die plastische Querzahl kann aus nachfolgender Überlegung hergeleitet werden.

8. Bestimmung der plastischen Querzahl

Die Querdehnungen eines zugbeanspruchten Stabs (einachsiger Spannungszustand) erhält man bei additiver Zerlegung der Gesamtdeformation zu

$$\nu_g \varepsilon_g = \nu_e \varepsilon_e + \nu_p \varepsilon_p. \quad (8.1)$$

Mit ν_g als Querzahl der Gesamtdehnung ε_g und den entsprechenden elastischen und plastischen Anteilen ε_e und ε_p sowie den dazugehörigen Querzahlen ν_e und ν_p .

Die plastische Querzahl ν_p ist im Gegensatz zu den Vorstellung bei metallischen Werkstoffen keine konstante Größe, sondern sie soll bei Fließbeginn mit der elastischen Querzahl beginnen (das bedeutet plastische Kompressibilität) und sich während der Verfestigung der plastischen Querzahl ν_{pu} beim Höchstlastpunkt nähern. Diese „Querzahlverfestigung“ kann ebenfalls mit der AVRAMI-Funktion bzw. zunächst einfacher durch den in Bild 8-1 dargestellten linearen Zusammenhang beschrieben werden.

Für den Bereich vom Fließbeginn bis zur plastischen Dehnung bei Höchstlast lautet dieser:

$$\varepsilon_p \leq \varepsilon_{pu} : \nu_p = \nu_e + (\nu_{pu} - \nu_e) \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_{pu}}. \quad (8.2)$$

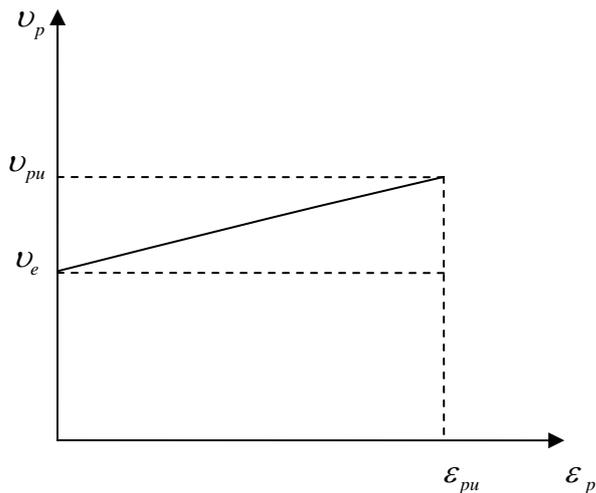


Bild 8-1: Lineare Abhängigkeit der plastischen Querzahl von der plastischen Dehnung

Mit Gl.(8.1) folgt aus Gl.(8.2) die Gesamtquerzahl

$$v_g = v_e + (v_{pu} - v_e) \frac{\epsilon_p}{\epsilon_{pu}} \left(1 - \frac{\epsilon_e}{\epsilon_g} \right) \quad (8.3)$$

und wegen $\epsilon_e = \sigma/E$ sowie $\epsilon_p = \epsilon_g - \sigma/E$ die plastische Querzahl bei Höchstlast zu

$$v_{pu} = \frac{v_{gu} - v_e \frac{\sigma_u}{E \epsilon_{gu}}}{1 - \frac{\sigma_u}{E \epsilon_{gu}}} \quad (8.4)$$

Der Ausdruck

$$E \epsilon_{gu} := \sigma_{eu}$$

stellt eine „elastische“ Spannung dar, die sich bei linearelastischem Verhalten und einer Dehnung ϵ_{gu} einstellt. Damit lautet die Gl.(8.4)

$$v_{pu} = \frac{v_{gu} - v_e \frac{\sigma_u}{\sigma_{eu}}}{1 - \frac{\sigma_u}{\sigma_{eu}}} \quad (8.5)$$

Für $\sigma_{eu} \square \sigma_u$ ergibt sich der plausible Zusammenhang

$$v_{pu} \approx v_{gu} \quad (8.6)$$

der durch die Anwendung der plastischen Stoffgleichungen (s. Kap.C) auf die Ergebnisse aus den Untersuchungen mit der Doppelrohrprobe numerisch bestimmt werden kann.

Gln.(8.2) bis (8.5) lassen den Nachfestigungsbereich unberücksichtigt. Deshalb wird statt von Gl. (8.2) von einem AVRAMI - Ansatz ausgegangen. Für $\varepsilon_p \geq 0$ gilt dann:

$$\varepsilon_p \geq 0: \quad \nu_p = \nu_e + m \left[1 - \exp(-n \varepsilon_p) \right]. \quad (8.7)$$

Für $\varepsilon_p \rightarrow \infty$ geht die Spannung gemäß Gl.(7.7) gegen Null und es findet keine plastische Volumenänderung mehr statt. Das bedeutet, dass für

$$\varepsilon_p \rightarrow \infty: \quad \nu_p(\varepsilon_p \neq \infty) := \nu_{p\infty} = \frac{1}{2} \quad (8.8)$$

gilt und der Parameter m lautet:

$$m = \frac{1}{2} - \nu_e. \quad (8.9),a$$

Für den Höchstlastpunkt erhält man mit

$$\varepsilon_p = \varepsilon_{pu}: \quad n \varepsilon_{pu} = \ln \frac{1 - 2\nu_e}{1 - 2\nu_{pu}}. \quad (8.9),b$$

Durch die Gln. (8.9)a,b sind die Ansatzfreiwerte von Gl.(8.7) bestimmt und für die plastische Querszahl folgt aus Gl.(8.7)

$$\nu_p = \nu_e + \frac{1}{2}(1 - 2\nu_e) \left[1 - \exp\left(-\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_{pu}} \ln \frac{1 - 2\nu_e}{1 - 2\nu_{pu}} \right) \right]. \quad (8.10)$$

Mit Gl.(8.10) liegt eine von der plastischen Dehnung ε_p abhängige Beziehung vor, deren Kenngrößen ν_e, ν_{pu} und ε_{pu} experimentell zu bestimmen sind. Für die schubbasierte Abhängigkeit wird der Dehnungsquotient in Gl. (8.10) durch den entsprechenden Gleitungsquotienten ersetzt (Ziff. 13).

B Deformationsratenabhängigkeit

9. KELVIN / VOGT - Modell für die Gesamtdeformation

Bei kleinen Deformationsraten können Versuche mit Be- und Entlastung der Probe durchgeführt und damit die additive Überlagerung von elastischer und plastischer Verformung nachgewiesen werden. Bei dynamischer Beanspruchung mit Schnellzerreissmaschinen oder Fallwerken sind derartige zyklische Versuche nicht möglich, so dass bei entsprechender Messtechnik, wenn an der dünnen Klebschicht überhaupt, nur unregelmäßige (d.h. Versuchsdurchführung ohne konstante Dehnraten) Spannung – Gesamtdeformation - Zusammenhänge ermittelt werden können.

Ratenabhängigkeit kann im einfachsten Fall durch die linearen mechanischen Modelle aus Feder und Dämpfer dargestellt werden. Das KELVIN / VOGT- Modell

$$\sigma = E \varepsilon + \eta \dot{\varepsilon} \quad (8.11)$$

das sich gut zur Einführung der Dehnratenabhängigkeit eignet, kann zur allgemeinen Herleitung der ratenabhängigen Stoffgleichungen bzw. Fließkurve verwendet werden.

Im nicht linearviskoelastischen Fall ist die Viskosität η eine von ε und $\dot{\varepsilon}$ abhängige Funktion und der Elastizitätsmodul E (Ursprungsmodul) dagegen eine nur von $\dot{\varepsilon}$ abhängige Funktion, so dass Gl. (9.1) die Form

$$\sigma = P(\dot{\varepsilon})\varepsilon + Q(\varepsilon, \dot{\varepsilon})\dot{\varepsilon} \quad (8.12)$$

annimmt. Die im Allgemeinen nichtlineare Viskosität Q in Gl.(8.12) wird mit zunehmender Verfestigung und damit Dehnung sowie mit zunehmender Dehnrates ansteigen, etwa nach dem in Bild 9-1 dargestellten Zusammenhang.

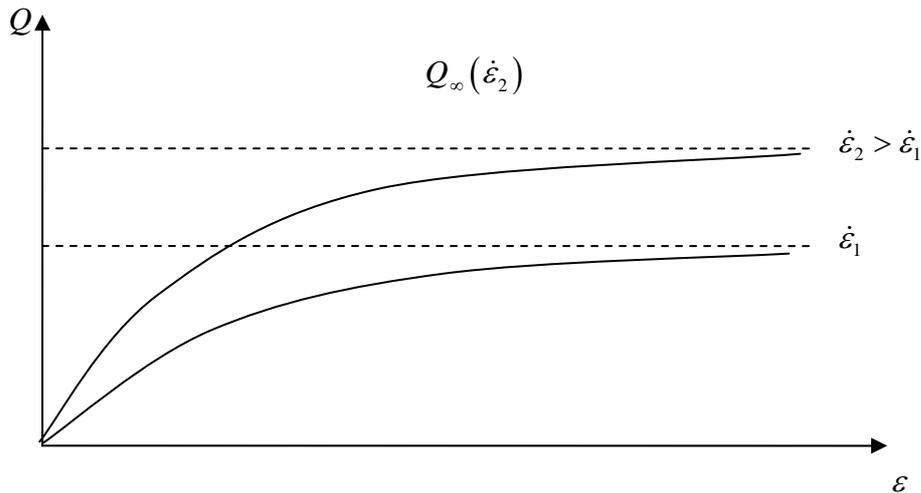


Bild 9-1: Schematische Darstellung einer von der Dehnung und der Dehnrates abhängigen Viskosität. Für große Verformungen geht die Viskosität einer Grenzviskosität Q_∞ entgegen, die ihrerseits wiederum von der Dehnrates abhängt:

$$Q = Q_\infty(\dot{\varepsilon})[1 - \exp(-q\varepsilon)]. \quad (8.13)$$

Mit den Gln.(8.12) und (8.13) erhält man die ratenabhängige Spannung – Dehnung - Beziehung:

$$\sigma = P(\dot{\varepsilon})\varepsilon + Q_\infty(\dot{\varepsilon})[1 - \exp(-q\varepsilon)]. \quad (8.14)$$

Eine vereinfachende Annahme, die experimentell zu überprüfen ist, lautet $q = konst.$, so dass schließlich die Parameter P und Q_∞ nur von der Dehnrates $\dot{\varepsilon}$ abhängen.

Für Zugversuche mit jeweils konstanter Dehnrates erhält man dann für

$$\dot{\varepsilon} = konst. \text{ und } \sigma \leq \sigma_u \text{ die Gl. (7.1):}$$

$$\sigma = A_0\varepsilon + A_1[1 - \exp(-k_\varepsilon\varepsilon)] \quad (8.15)$$

mit $A_0 = A_0(\dot{\varepsilon})$ und $A_1 = A_1(\dot{\varepsilon})$. Entsprechend lautet die Schubspannung. - Gleitung -Beziehung

$$\dot{\gamma} = konst., \quad \tau \leq \tau_u \quad \tau = B_0(\dot{\gamma})\gamma + B_1(\dot{\gamma})[1 - \exp(-k_\gamma\gamma)]. \quad (8.16)$$

Sind experimentelle Ergebnisse in Form von Spannung – Verformung - Zusammenhängen unter jeweils konstanter Deformationsrate vorhanden, dann lassen sich die Parameter $B_0(\dot{\gamma})$, $B_1(\dot{\gamma})$ und k sowie die entsprechenden Größen gemäß Gl. (9.5) nach den Auswertemethoden in Ziff. 4

bestimmen. Man erhält dann die ratenabhängigen Kennwerte von Ziff. 7, die in Tabelle 9/1 nochmals zusammengestellt sind.

Tabelle 9/1: Ratenabhängige Kennwerte für die Grundbeanspruchungsarten

$E^*(\dot{\epsilon}); \overline{\sigma}_F(\dot{\epsilon}), \overline{\epsilon}_F(\dot{\epsilon}); \sigma_u(\dot{\epsilon}), \epsilon_u(\dot{\epsilon}); k_\epsilon$
$G(\dot{\gamma}); \overline{\tau}_F(\dot{\gamma}), \overline{\gamma}_F(\dot{\gamma}); \tau_u(\dot{\gamma}), \gamma_u(\dot{\gamma}); k_\gamma$

Mit den Moduln und Fließgrenzen können, wie in Ziff. 5 gezeigt, auch die plastischen Verformungsanteile bestimmt und die Entfestigung gemäß den Ziffern 6 und 7 durch die weiteren Parameter $d\epsilon$ und $d\gamma$ berücksichtigt werden.

Für Polymerwerkstoffe kann die Abhängigkeit der Scherspannung bzw. Fließgrenze von der Dehnrage durch den halblogarithmischen Ansatz

$$\sigma_{F_{dyn}} = \overline{P} + \overline{Q} \ln \dot{\epsilon} \tag{8.17}$$

ausgedrückt werden, einer Formel, die mit der EYRINGSchen Theorie für einen thermisch aktivierten Fließprozess in Verbindung gebracht werden kann. Aus Dimensionsgründungen schreibt man statt

$$\dot{\epsilon} := \frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon^*}$$

und aus versuchstechnischen Gründen setzt man $\epsilon^* = \dot{\epsilon}_{qs}$, so dass aus Gl. (9.7) folgt

$$\sigma_{F_{dyn}} = \overline{P} + \overline{Q} \ln \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_{qs}} \tag{8.18}$$

Der quasistatische Versuch liefert $\sigma_{F_{qs}} = P$ und damit die Ratenabhängigkeit der Fließgrenze zu

$$\frac{\sigma_{F_{dyn}}}{\sigma_{F_{qs}}} = 1 + N \ln \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_{qs}}, \quad N = \frac{\overline{Q}}{\sigma_{F_{qs}}} \tag{8.19}$$

Formal folgt für alle Spannungskennwerte (SKW)

$$\frac{(SKW)_{dyn}}{(SKW)_{qs}} = 1 + N_{kl} \ln \frac{\dot{\epsilon}_k}{\dot{\epsilon}_{kqs}} \tag{8.20}$$

mit N_{kl} und $\dot{\epsilon}_k$ nach Tab. 9/2

Tabelle 9/2: Spannungskennwerte

$k \backslash l$	σ	τ
F	σ_F	τ_F
u	σ_u	τ_u

$\dot{\epsilon}_\sigma = \dot{\epsilon}$
$\dot{\epsilon}_\tau = \dot{\gamma}$

Ein weiterer Ansatz, der ebenfalls für Kunststoffe experimentell bestätigt wird lautet

$$\frac{(SKW)_{dyn}}{(SKW)_{qs}} = 1 + M_{kl} \left(\frac{\dot{\varepsilon}_k}{\dot{\varepsilon}_{kqs}} \right)^m \quad (9.11)$$

10. Deformationsratenabhängige Fließkurve bei fehlenden experimentellen Spannung – Verformung - Zusammenhängen

Die Messung der Verlängerung insbesondere bei kleinen Anfangslängen (z. B. 0,2 mm dicke Klebschicht) unter hohen Geschwindigkeiten stößt experimentell an Grenzen, so dass bisher keine dehnratenabhängigen Fließkurven zur Auswertung und Formulierung zur Verfügung stehen. Jedoch sind Ergebnisse aus japanischen Untersuchungen bekannt [6], aus denen die Ratenabhängigkeit der Versagensspannung bestimmt werden kann, sowohl bei Zug- als auch bei Schubbeanspruchung stumpfgeklebter Rohre (Bild 10-1). Die Festigkeiten bei hohen Beanspruchungsarten verdoppeln sich annähernd bei dynamischer Beanspruchung gegenüber denjenigen bei quasistatischer.

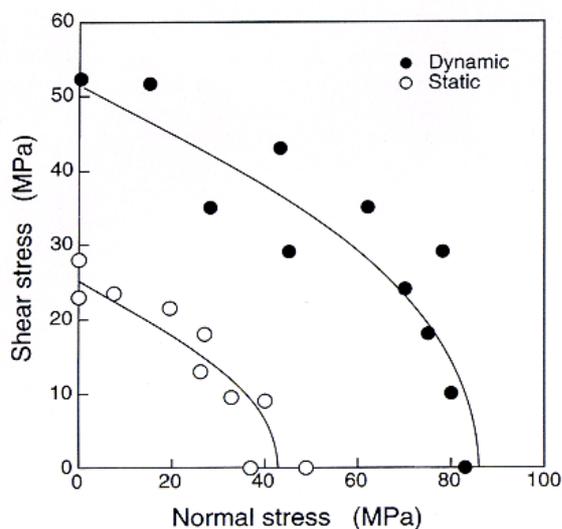


Bild 10-1: Ergebnisse aus [6] bei quasistatischer und dynamischer Beanspruchung

Für die weitere Modellbildung soll nur das quasistatische Verhalten, wie bisher dargestellt, bekannt und formulierbar sein, für die dynamische Beanspruchung sollen gemäß Bild 10-1 dagegen nur

$$\sigma_u(\dot{\varepsilon}) \quad \text{bzw.} \quad \tau_u(\dot{\gamma}) \quad (10.1)a,b$$

bekannt sein. Diese ratenabhängigen Festigkeiten sind aber die wichtigsten Kenngrößen für die Bewertung und Auslegung von Bauteilen, sie sind aber auch diejenigen, die im Gegensatz zur Deformation dünner Klebschichten bei hohen Beanspruchungsgeschwindigkeiten noch relativ einfach experimentell zu bestimmen sind.

Wie die bisherigen Formulierungen gezeigt haben, werden jedoch neben den Festigkeiten σ_u und τ_u auch die dazugehörigen Gesamtverformungen benötigt. Diese sollen über eine einfache Annahme bestimmt werden. Dazu geht man von den Gln. (8.15) und (8.16) aus. Im Folgenden wird die Herleitung nur für die Zugbeanspruchung dargestellt, diejenige für die Torsionsbeanspruchung verläuft entsprechend.

Bis zum Erreichen der Festigkeit $\sigma_u(\dot{\varepsilon})$ (d.h. bis zum „Peak“) nimmt das Material bzw. die Klebschicht die Gesamtenergie.

$$W = \int_0^{\varepsilon_u} \sigma d\varepsilon \quad (10.2)$$

auf. Aus Literaturkenntnis heraus und aus üblichen Ansätzen kann zunächst angenommen werden, dass diese Gesamtenergieaufnahme unabhängig von der Dehnrage ist, so dass gilt:

$$W_{qs} = W_{dyn} \cdot \tag{10.3}$$

Die quasistatische „Peak-Energie“ W_{qs} lässt sich aus den Ansätzen von Ziff. 4 über

$$W_{qs} = \int_0^{\varepsilon_{uqs}} A_0 \varepsilon d\varepsilon + \int_0^{\varepsilon_{uqs}} A_1 [1 - \exp(-k_\varepsilon \varepsilon)] d\varepsilon$$

bestimmen. Durch das Gleichsetzen der quasistatischen Energieaufnahme W_{qs} mit der dynamischen W_{dyn} findet man durch numerisches Lösen einer nichtlinearen Gleichung die „Peak-Dehnung“ $\varepsilon_{u\,dyn}$ bei dynamischer Beanspruchung.

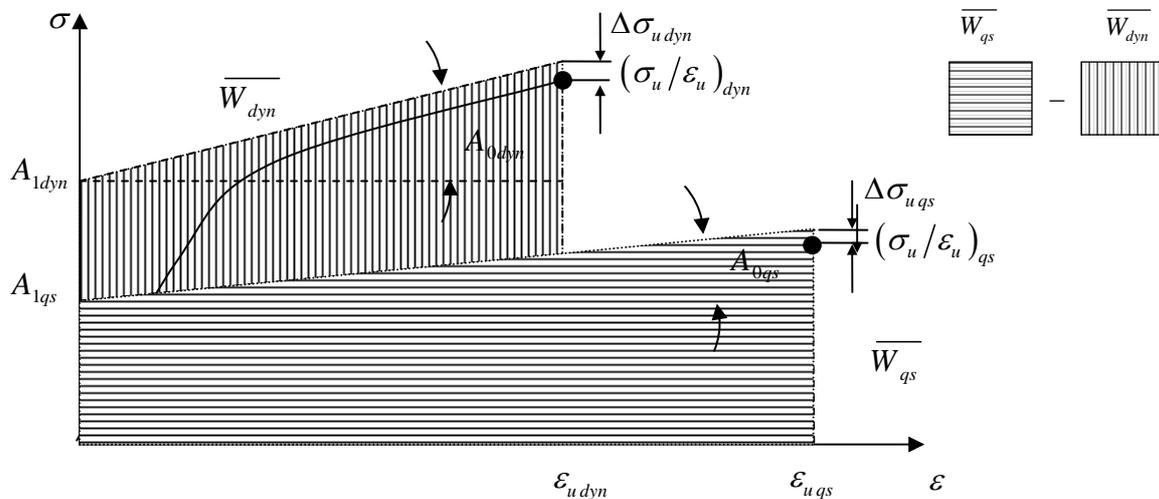


Bild 10-2: Schematische Darstellung ratenabhängiger Spannung – Verformung -Zusammenhänge

Analytisch einfacher erhält man diese Größe durch Gleichsetzen der schraffierten Flächen in Bild 10-2:

$$\overline{W}_{qs} = \overline{W}_{dyn} \cdot \tag{10.4}$$

Die zu der Peak-Dehnung gehörende Asymptotenspannung σ_u wird definiert als

$$\overline{\sigma}_u = \sigma_u + \Delta\sigma_u \cdot \tag{10.5),a}$$

Man wird wegen $\Delta\sigma_u \ll \sigma_u$ auch

$$\overline{\sigma}_u = \sigma_u \tag{10.5),b}$$

setzen können.

Aus Bild 10-2 liest man für die quasistatische Energie bis zum Peak $\overline{\sigma}_{uqs}$ ab

$$\overline{W}_{qs} = \frac{1}{2} (A_{1qs} + \overline{\sigma}_{uqs}) \varepsilon_{uqs} \tag{10.6}$$

und mit Gl.(10.4) erhält man daraus

$$\varepsilon_{u\,dyn} = \frac{\overline{2W}_{qs}}{A_{1\,dyn} + \overline{\sigma}_{u\,dyn}}. \quad (10.7)$$

Weiterhin liefern die Gln. (8.15) und (10.4) die Zusammenhänge

$$A_{1\,dyn} = \sqrt{\overline{\sigma}_{u\,dyn}^2 - \overline{2W}_{qs} A_{0\,dyn}} \quad (10.8),a$$

bzw.

$$A_{0\,dyn} = \frac{\overline{\sigma}_{u\,dyn}^2 - A_{1\,dyn}^2}{\overline{2W}_{qs}}. \quad (10.8),b$$

Die Gl. (8.15) besitzt drei Ansatzfreiwerte

$$A_0(\dot{\varepsilon}) := A_{0\,dyn}, \quad A_1(\dot{\varepsilon}) := A_{1\,dyn}, \quad k_\varepsilon(\dot{\varepsilon}) := k_{\varepsilon\,dyn}$$

und experimentell bekannt sind \overline{W}_{qs} und $\overline{\sigma}_{u\,dyn}$. Mit der unbekanntem Peak-Dehnung $\varepsilon_{u\,dyn}$ stehen den bekannten Größen $\overline{\sigma}_{u\,dyn}$ und \overline{W}_{qs} insgesamt vier Bestimmungsstücke gegenüber, so dass weitere vereinfachende Annahmen getroffen werden müssen.

Vereinfachende Annahmen:

1. „Exponentialkoeffizient“ ist gleich

$$k_{\varepsilon\,dyn} = k_{\varepsilon\,qs} \quad (10.9),a$$

2. Steigung der Asymptoten ist gleich (Fall1)

$$A_{0\,dyn} = A_{0\,qs} \quad (10.9),b$$

3. Ordinatenabschnitt der Asymptoten ist gleich (Fall2)

$$A_{1\,dyn} = A_{1\,qs}. \quad (10.9),c$$

Aus diesen Annahmen erhält man die Parameter für die Fließkurven bei dynamischer Beanspruchung (Tabelle 10/1).

Tabelle 10/1: Annahmen zur Bestimmung der AVRAMI-Koeffizienten bei dynamischer Beanspruchung

Fall 1:	$A_{0\,dyn} = A_{0\,qs}$	Fall 2	$A_{1\,dyn} = A_{1\,qs}$
$A_{1\,dyn} = \sqrt{\overline{\sigma}_{u\,dyn}^2 - \overline{2W}_{qs} A_{0\,qs}}$		$A_{0\,dyn} = \frac{\overline{\sigma}_{u\,dyn}^2 - A_{1\,qs}^2}{\overline{2W}_{qs}}$	
$\varepsilon_{u\,dyn} = \frac{\overline{2W}_{qs}}{\sqrt{\overline{\sigma}_{u\,dyn}^2 - \overline{2W}_{qs} A_{0\,qs}} + \overline{\sigma}_{u\,dyn}}$		$\varepsilon_{u\,dyn} = \frac{\overline{2W}_{qs}}{A_{1\,qs} + \overline{\sigma}_{u\,dyn}}$	

Ein entsprechendes Rechenbeispiel ist ausgehend von den experimentellen Ergebnissen aus quasistatischen Untersuchungen an BETAMATE 1496 in den Abbildungen 10-2 bis 10-4 dargestellt.

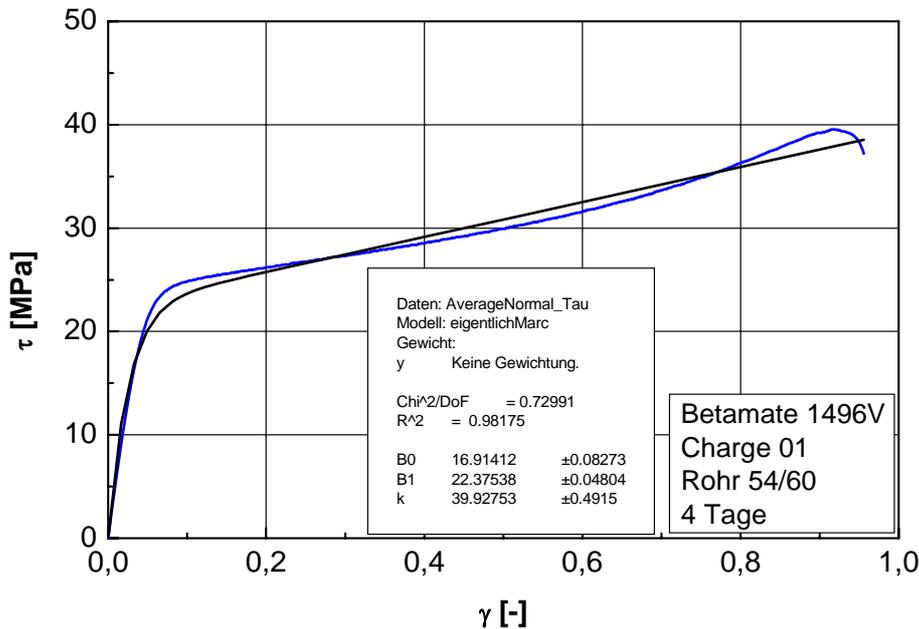


Bild 10-2: Schubspannung – Gleitung – Verlauf bei quasistatischer Torsionsbeanspruchung und analytische Beschreibung nach Gl. (4.1)

Durch die Näherungsmethode in Ziff. 10 kann bei fehlenden experimentellen Ergebnissen ein einfaches Modell für das ratenabhängige Verhalten der Klebschicht erzeugt werden und zwar für die beiden Grundversuchsarten Zug bzw. Torsion gemäß Gl. (8.16).

Bild 10-3: Synthetische Spannung – Verformung – Beziehung nach Fall 1 von Tabelle 10/1

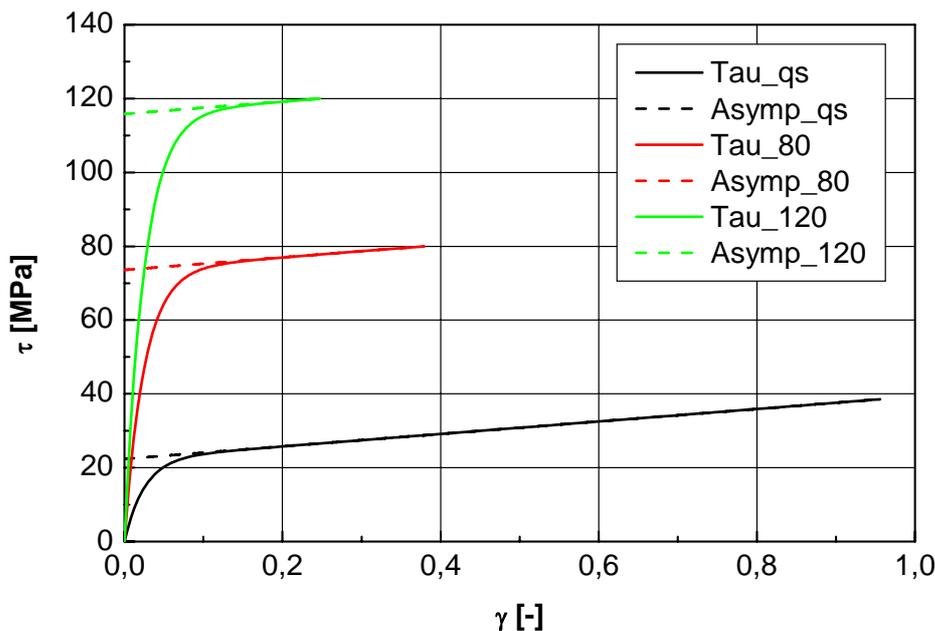


Bild 10-3: Synthetische Spannung – Verformung – Beziehung nach Fall 1 von Tabelle 10/1

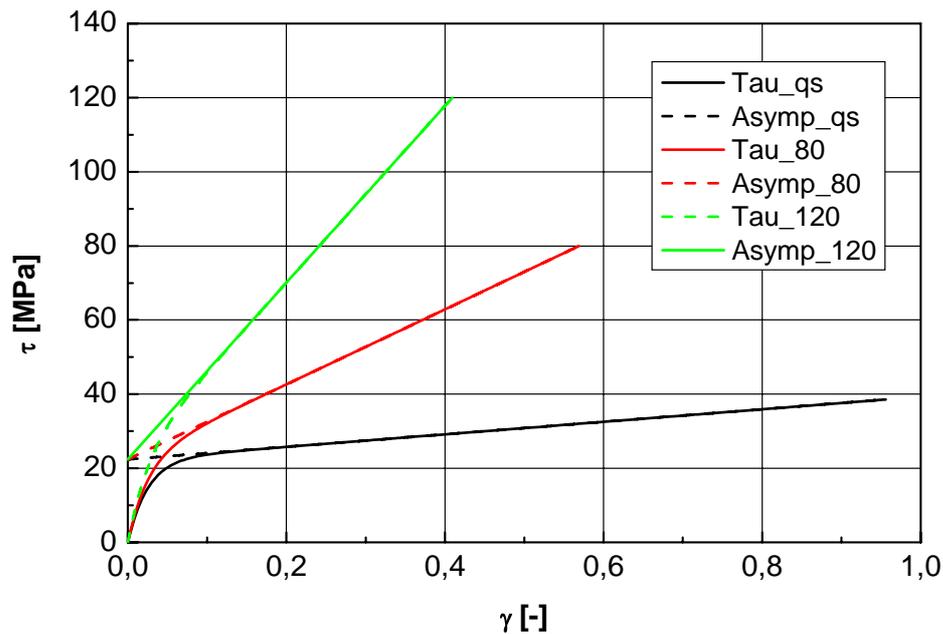


Bild 10-4: Synthetische Spannung – Verformung – Beziehung nach Fall 2 von Tabelle 10/1

Für die zähmodifizierten EP-Harze fehlen bisher Modelle, mit denen aus dem mechanischen Verhalten der einzelnen Komponenten bzw. Phasen auf das „Verbund-Verhalten“ geschlossen werden kann. Denkbar ist deshalb auch, dass der Ansatz über die Ratenabhängigkeit der Gesamtenergie experimentell nicht bestätigt wird. Dann stehen die Deformationen ε_{udyn} bzw. γ_{udyn} beim jeweiligen Spannungsmaximum nicht mehr in einem bestimmten Verhältnis (Tab. 10/1), sondern können in folgende Beziehung gebracht werden:

$$\varepsilon_{uqs} = \kappa_{\varepsilon} \varepsilon_{udyn} \quad \text{bzw.} \quad \gamma_{uqs} = \kappa_{\gamma} \gamma_{udyn} \quad (10.10a,b)$$

Die weitere Betrachtung wird nur für Gl. (10.10a) durchgeführt und geht von Gl. (10.7) aus:

$$A_{1dyn} + \overline{\sigma_{udyn}} = \frac{2\overline{W_{qs}}}{\varepsilon_{udyn}}, \quad (10.11)$$

die mit Gl. (10.10a) zu

$$A_{1dyn} = 2\kappa_{\varepsilon} \frac{\overline{W_{qs}}}{\varepsilon_{uqs}}, \quad (10.12)$$

führt. Aus den Gln. (10.7) und (10.8b) erhält man ferner

$$A_{0dyn} = \frac{\overline{\sigma_{udyn}} - A_{1dyn}}{\varepsilon_{udyn}} \quad (10.13)$$

und durch Verknüpfung mit Gl. (10.12)

$$A_{0dyn} = \kappa_{\varepsilon} \frac{\overline{\sigma_{udyn}}}{\varepsilon_{uqs}} - 2\kappa_{\varepsilon}^2 \frac{\overline{W_{qs}}}{\varepsilon_{uqs}^2}. \quad (10.14)$$

Mit A_{1dyn} nach Gl. (10.12) und A_{2dyn} nach Gl. (10.14) sowie der Annahme nach Gl. (10.9 a) liegen die Koeffizienten für die Spannung – Dehnung - Beziehung nach Gl. (9.5) und entsprechend für die Schubspannung – Gleitung - Beziehung nach Gl. (9.6) vor.

Einen einfachen Sonderfall liefert die den bisherigen Ergebnissen bei dynamischer Beanspruchung nahe kommende Annahme:

$$\kappa_{\varepsilon} = 1 \quad (10.15a)$$

und

$$\overline{\sigma}_{u_{dyn}} = 2 \overline{\sigma}_{u_{qs}} \quad (10.15b)$$

Mit diesen Annahmen lauten die Koeffizienten für Gl. (9.5):

$$A_{1dyn} = A_{1qs} + \overline{\sigma}_{u_{qs}} \quad (10.16a)$$

und

$$A_{0dyn} = \frac{\overline{\sigma}_{u_{qs}} - A_{1qs}}{\varepsilon_{u_{qs}}} \quad (10.16b)$$

Gemäß Gl. (4.3) lautet der dynamische Elastizitätsmodul

$$E_{dyn} = A_{0dyn} + k_{\varepsilon} A_{1dyn} \quad (10.17)$$

Mit den Gln. (10.14) und (10.11) folgt er aus Gl. (10.17) zu

$$E_{dyn} = \frac{\kappa_{\varepsilon}}{\varepsilon_{u_{qs}}} \left[\overline{\sigma}_{u_{dyn}} + 2 \overline{W}_{qs} \left(k_{\varepsilon} - \frac{\kappa_{\varepsilon}}{\varepsilon_{u_{qs}}} \right) \right] \quad (10.18)$$

C Mehrachsige Beanspruchung

Grundlagen für die Behandlung der mehrachsigen Beanspruchung ist der Artikel „Grundlagen zur Berechnung des mechanischen Verhaltens von strukturellen Klebverbindungen des Fahrzeugbaus“ (Schlimmer 2003 [4]). Ausgangspunkt ist das dort entwickelte sog. BELTRAMI - Diagramm für die kinematische Verfestigung, in dem der Fließbeginn und die Festigkeit bei alleiniger sowie kombinierter Zug-/Torsionsbeanspruchung in Abhängigkeit vom hydrostatischen Spannungszustand (J_1 lineare Invariante des Spannungstensors) dargestellt sind. Der bei quasistatischer Beanspruchung gefundene lineare Zusammenhang zwischen einfacher sowie kombinierter Beanspruchung benötigt zur Formulierung der notwendigen Stoffgleichungen und Anstrengungsbeziehungen, d. h. Fließbedingung, Höchstlastbedingung bzw. Festigkeitskriterium und Vergleichsspannung, -dehnung mindestens zwei Ergebnisse in Form von Spannung – Verformung - Kurven aus unterschiedlicher Beanspruchung. Diese sind im Allgemeinen einachsige Grundversuche für Klebverbindungen wie Zug- und Torsionsbeanspruchung der Doppelrohrprobe oder die Schubbeanspruchung an einer dicken Zugscherprobe und die Zugbeanspruchung einer stumpf geklebten Zugprobe.

Streng genommen benötigen die in [4] aufgestellten Fließ- und Versagensbedingung sowie das plastische Potential gegenüber den auf der MISES-Theorie beruhenden Ansätzen drei unabhängig voneinander stehende Grundversuchsarten wie Zug, Druck und Torsion. Druckversuche an dünnen Klebschichten stoßen schnell an die Belastungsgrenzen von Prüfmaschinen und die Ergebnisse sind für die Berechnung des Versagens von Klebverbindungen weniger relevant als die Ergebnisse bei Zugbeanspruchung. Wen zur direkten Parameteridentifikation keine kombinierten Versuche aus Zug-

und Torsionsbeanspruchung zur Verfügung stehen, dann muss eine weitere Annahme getroffen werden, wie diejenige, die zur BELTRAMI – Darstellung [4] führte. Sie ist deshalb als eine gute Näherung aufzufassen, die auch bei Druckbeanspruchung zu sinnvollen Ergebnissen führen wird. Vorteile dieser Näherungslösung sind, dass Fließ- und Versagensbedingung und das plastische Potential miteinander verknüpft sind und dass dadurch die durch die beiden einachsigen Grundversuche mit der Doppelrohrprobe experimentell ermittelten Spannung – Verformung – Zusammenhänge zur Bestimmung der Modellparameter und damit zur Berechnung der Spannungs- und Verformungszustände in Klebschichten ausreichen.

Diese beiden Versuchsarten gehören für quasistatische, schwingende und statische Beanspruchung inzwischen zum Stand der Technik im Institut für Werkstofftechnik der Universität Kassel. Die Anlage zur versuchstechnisch sehr komplizierten und aufwändigen dynamischen Beanspruchung befindet sich zur Zeit im Aufbau. Über den Stand der Arbeiten wird an anderer Stelle berichtet werden.

11. Festigkeitshypothese bei dynamischer Beanspruchung

Für dynamische Beanspruchung soll das BELTRAMI - Schaubild ebenfalls Gültigkeit haben (Bild 11-1).

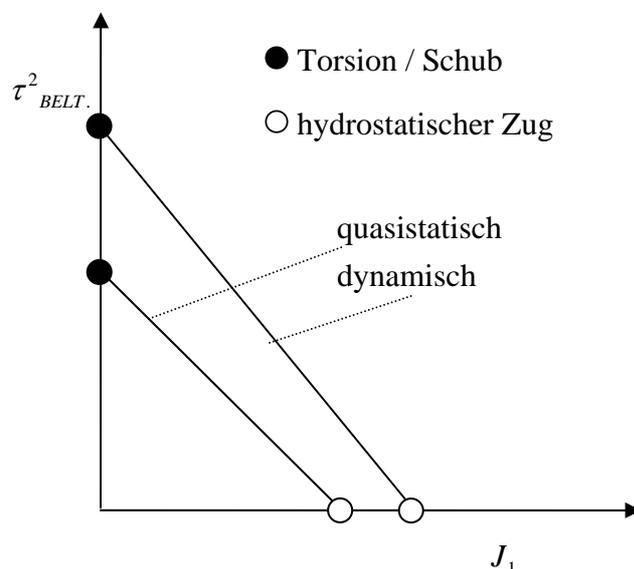


Bild 11-1: BELTRAMI - Spannung in Abhängigkeit von der 1. Spannungsinvarianten für quasistatische und dynamische Beanspruchung,

Die quasistatische Fließbedingung

$$\tau_{Fqs}^2 = J_2' + \frac{1}{3} a_1 \tau_{Fqs} J_1 + \frac{1}{6} \frac{1-2\nu_e}{1+\nu_e} J_1^2 \quad (11.1)$$

geht formal in eine allgemeine Anstrengungshypothese für ratenabhängige Gesamtdeformation über:

$$\tau_v^2 = J_2' + \frac{1}{3} a_1 (\gamma_v, \dot{\gamma}_v) \tau_v J_1 + \frac{1}{6} \frac{1-2\nu_g}{1+\nu_g} J_1^2. \quad (11.2)a$$

Die Gesamtquerzahl ν_g in Gl. (11.2),a ist wie die durch $a_1(\gamma_v, \dot{\gamma}_v)$ definierte Steigung der Geraden in Bild11-1 eine Funktion der Vergleichsgleitung γ_v und der Vergleichs-gleitungsrate $\dot{\gamma}_v$:

$$\nu_g = \nu_g(\gamma_v, \dot{\gamma}_v). \quad (11.2)b$$

Die Fließspannung τ_{Fqs} bei quasistatischer Beanspruchung steht aus Dimensionsgründen in Gl. (11.2). Sie kann durch eine andere Spannung, z.B. τ_{uqs} , ersetzt werden.

Zur Auswertung experimenteller Ergebnisse bei dynamischer Beanspruchung (s. Bild 10-1) bestimmt man die BELTRAMI - Spannung für die Peak - Spannungen

$$\tau_{BELT.}^2 = \frac{1}{3} \left(\sigma_x^2 + \dots - \sigma_x \sigma_y - \dots \right) + \tau_{xy}^2 + \dots + \frac{1}{6} \frac{1 - \nu_{gu}}{1 + \nu_{gu}} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (11.3a)$$

und stellt sie in Abhängigkeit von der linearen Invarianten (1.Invariante) J_1

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (11.3b)$$

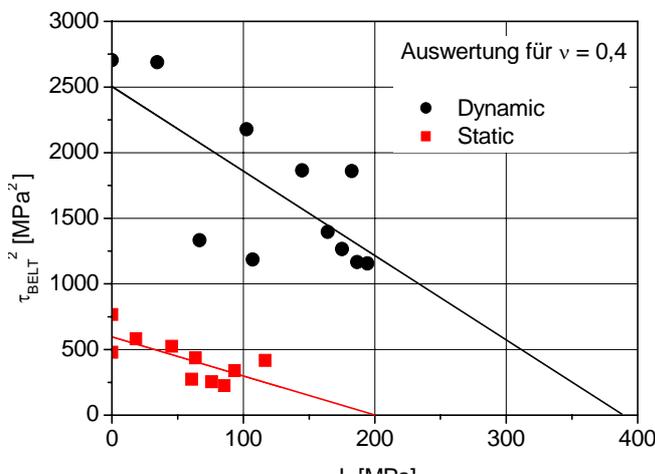


Bild 11-2: BELTRAMI – Darstellung der Messergebnisse [6] von Bild 10-1

dar, wie dies für die SATO/IKEGAMI - Ergebnisse [6] in Bild 11-2 ausgeführt worden ist. Man erkennt, dass eine gute Beschreibung dieser Versuchsergebnisse mit der vorgeschlagenen Theorie vorgenommen werden kann.

Von diesem Stand der Ergebnisse und der in [4] dargestellten Deformationstheorie ausgehend, lauten die Stoffgleichungen für die elastoplastische Gesamtdeformation

$$\left(\varepsilon_{ij} \right)_g = \frac{1}{S_\varepsilon} \left[(1 + \nu_g) \sigma_{ij} - \nu_g \sigma_{kk} \delta_{ij} \right]. \quad (11.4)$$

Der Zug-Sekantenmodul S_ε in Gl. (11.4) ist eine von der Vergleichsspannung abhängige Größe, die durch den experimentell bestimmten Sekantenmodul aus einem einachsigen Zugversuch unter der Voraussetzung gleicher Werkstoffanstrengung, d.h. $\sigma \rightarrow \sigma_v$ und $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_v$, definiert wird (Bild 11-3).

Entsprechend des linearelastischen Zusammenhangs soll für die Gesamtdeformation gelten

$$S_\varepsilon = 2(1 + \nu_g) S_\gamma \quad (11.5)$$

mit S_γ als Schub-Sekantenmodul. Die drei elastoplastischen Größen in Gl. (11.5) sind Funktionen der

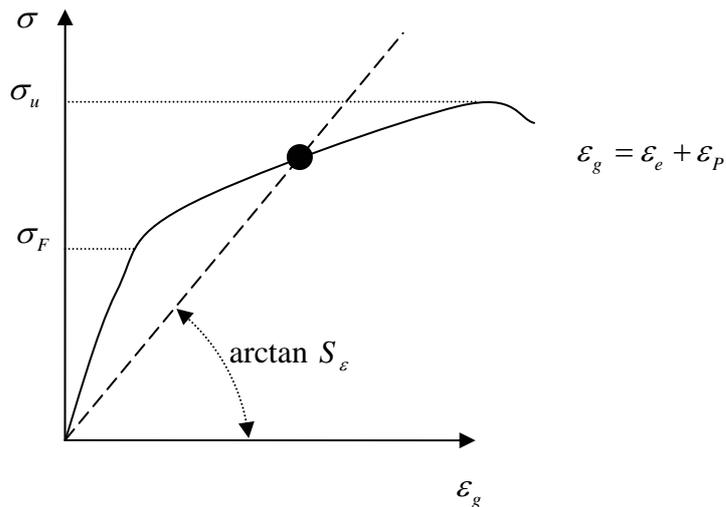


Bild 11-3: Definition des Sekantenmodul

Vergleichsspannung, -dehnung und der Dehnrate. Bei der schubbasierten Betrachtung lauten diese bei konstanter Dehnrate

$$\dot{\gamma}_v = \text{konst.}: \quad \tau_v^2 = J_2' + \frac{1}{3} a_1(\gamma_v) \tau_F J_1 + \frac{1}{3} a_2(\gamma_v) J_1^2 \quad (11.6)$$

und

$$\gamma_v^2 = 2 \epsilon_{ij}' \epsilon_{ij}' + \frac{1}{3 a_2(\gamma_v)} \epsilon_{ii} \epsilon_{jj} \quad (11.7)$$

mit

$$a_2(\gamma_v) = \frac{1}{2} \frac{1 - 2\nu_g}{1 + \nu_g}. \quad (11.8)$$

Die Gesamtquerzahl ν_g besteht aus der elastischen und der plastischen Querzahl Gl. (8.1), wobei letztere nach Gl. (8.10) die plastische Querzahl ν_{pu} bei dem Spannungsmaximum benötigt. Diese erhält man unter Berücksichtigung von Gl.(8.6) aus kombinierten oder einfachen Zug- und Torsionsbeanspruchungen der stumpfgeklebten Doppellrohrprobe.

Für die kombinierte Beanspruchung lauten die Tensorprodukte in Gl. (11.7):

$$\epsilon_{ij}' \epsilon_{ij}' = \frac{2}{3} \epsilon_x^2 + \frac{1}{2} \gamma_{xy}^2 \quad (11.9a)$$

und

$$\epsilon_{ii} \epsilon_{jj} = \epsilon_x^2 \quad (11.9b)$$

sowie die Vergleichsgleichung nach Gl. (11.7):

$$\gamma_v^2 = \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{3 a_2} \right) \epsilon_x^2 + \gamma_{xy}^2. \quad (11.10)$$

Beim Spannungsmaximum lauten die entsprechenden Gesamtdeformationen ϵ_{xu} und γ_{xyu} und damit die Vergleichsgleichung

$$\gamma_{vu}^2 = \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{3a_2} \right) \varepsilon_{xu}^2 + \gamma_{xyu}^2. \quad (11.11)$$

Gemäß der in [4] definierten „Klebschichtanstregung“ ist die Vergleichsgleitung beim Maximum für einfache Torsionsbeanspruchung gleich derjenigen bei kombinierter Beanspruchung:

$$\left[\gamma_{vu}(\tau_v) \right]_{\sigma_{ijv}} = \left[\gamma_{vu}(\tau_v) \right]_{\tau_{xyu}} = \gamma_u(\tau_u). \quad (11.12)$$

Diese Bedingung für gleiche Werkstoffanstregung beim Maximum führt nach Gl. (11.11) zu der Beziehung:

$$\left[\frac{3}{4} + \frac{1}{3a_2(\gamma_{vu})} \right] = \frac{\gamma_u^2 - \gamma_{xyu}^2}{\varepsilon_{xu}^2} := \mu_u^2. \quad (11.13)$$

Die linke Seite von Gl. (11.13) folgt aus Gl. (11.8), so dass die Gesamtquerzahl beim Spannungsmaximum lautet:

$$\nu_{gu} = \frac{1}{2} \frac{\mu_u^2 - 2}{\mu_u^2 - 1}. \quad (11.14)$$

Für den Klebstoff BETAMATE 1496 V sind die Daten aus einachsiger und kombinierter Beanspruchung beim Maximum (s. Ziff. 2) in Tabelle 11/1 zusammengestellt. Ebenfalls angegeben sind die daraus berechneten μ_u -Werte nach Gl. (11.13).

Aus dieser Versuchsauswertung wird ersichtlich, dass die Gesamtquerzahl beim Maximum sich einheitlich zu $0,49 < \frac{1}{2}$ berechnen lässt und sie sich darauf in

Übereinstimmung mit Gl.(8.10) befindet, wenn man die plastische Querzahl für große Verformungen mit der Gesamtquerzahl gemäß Gl.(8.6) gleichsetzt.

Tabelle 11/ 1: Experimentelle Ergebnisse aus Untersuchungen des Klebstoff s BETAMATE 1496 V und Auswertung nach Gln. (11.13) und (11.14)

	$\tau_{xy} [MPa]$	$\gamma_{xy} [-]$	$\sigma_x [MPa]$	$\varepsilon_x [-]$	μ_u^2	ν_{gu}
Torsion	39,5	0,92	-	-	-	
$\alpha = 6$	28,1	0,58	17,5	0,08	79,69	0,49
$\alpha = 2$	20,6	0,28	25,96	0,12	53,33	0,49
$\alpha = \frac{1}{2}$	9,91	0,12	33,8	0,11	68,76	0,49
Zug	-	-	36,4	0,14	43,18	0,49

Ebenfalls lässt sich die in Tabelle 11/1 aufgelistete Auswertung für die plastischen Deformationsanteile durchführen, die Ergebnisse unterscheiden sich jedoch erst in weiteren Nachkommastellen, so dass sich die Gesamtquerzahl und die plastische Querzahl kaum unterscheiden werden.

Die bisherigen Betrachtungen in Kap. C galten für die quasistatische Beanspruchung. Die Grundgleichungen (11.6) bis (11.8) gelten aber auch für die Dehnratenabhängigkeit, so dass auch die Gesamtquerzahl ν_{gu} eine Funktion der Geschwindigkeit sein kann. Zur Bestimmung genügen die ratenabhängigen Deformationen beim Maximum $\varepsilon_u(\dot{\varepsilon}), \gamma_u(\dot{\gamma})$, so dass man aus Gl. (11.13) erhält

$$\mu_{u\,dyn} = \frac{\gamma_{u\,dyn}}{\varepsilon_{u\,dyn}} \quad (11.15)$$

und damit über Gl. (11.14) die ratenabhängige Querszahl beim Maximum, die wiederum nach Gl. (8.6) und Gl. (8.10) zur ratenabhängigen plastischen Querszahl führt.

Andererseits kann man annehmen, dass die Querszahl beim Maximum ratenunabhängig ist, so dass man über Gl. (11.15), z.B. bei bekanntem $\varepsilon_{u\,dyn}$ die dynamische Gleitung $\gamma_{u\,dyn}$ beim Maximum erhält. Entsprechend den Überlegungen in Kap. B findet man bei Anwendung der dort dargestellten Beziehungen für Schubbeanspruchung aus Gl. (10.7) bei Kenntnis des quasistatischen Verhaltens:

$$\tau_{u\,dyn} = \frac{2\overline{W}_{qs}}{\gamma_{u\,dyn}} - A_{1\,dyn} \cdot \quad (11.16)a$$

Je nach Anwendung von Fall 1 oder Fall 2 erhält man dann die ratenabhängige Torsions- bzw. Schubfestigkeit $\tau_{u\,dyn}$. Damit kann wiederum die ratenabhängige Schubfließkurve nach Gl. (9.6) erstellt werden.

Mit den dynamischen Festigkeiten $\sigma_{u\,dyn}$ und $\tau_{u\,dyn}$ erstellt man das sog. BELTRAMI- Diagramm (Bild 11-4) für dynamische Beanspruchung.

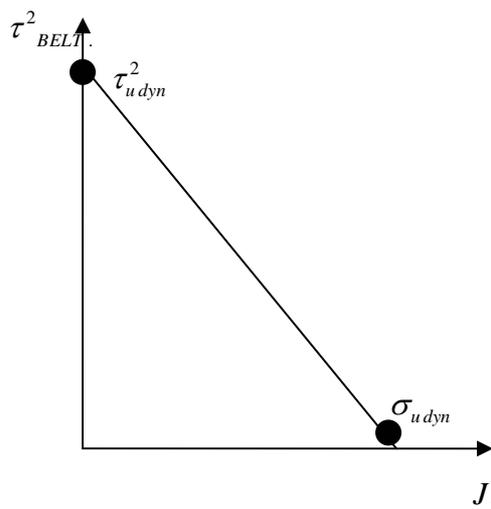


Bild 11-4: BELTRAMI-Diagramm für dynamische Beanspruchung

Aus der Steigung der Geraden in Bild 11-4 erhält man für die Vergleichsspannung nach Gl. (11.6) den Parameter $a_{1u\,dyn}$ beim Maximum und mit Gl. (11.8) erhält man ebenfalls für das Maximum und die dynamischen Beanspruchung

$$a_{2u\,dyn} = \frac{1}{2} \frac{1 - 2\nu_{gu}}{1 + \nu_{gu}} \quad (11.16)b$$

und somit ein (ratenabhängiges) dynamisches Festigkeitskriterium

$$\tau_{uv}^2 = J_2' + \frac{1}{3} a_{1u\,dyn} \tau_{u\,dyn} J_1 + \frac{1}{3} a_{2u\,dyn} J_1^2 \cdot \quad (11.17)$$

Die Auswertung der Ergebnisse von SATO / IKEGAMI [6] mit Gl. (11.17) ist schon im Bild 11-2 dargestellt.

Die experimentellen Ergebnisse aus den Untersuchungen an der Doppelrohrprobe zeigen in erster Näherung folgende Zusammenhänge, die zur Validierung experimenteller Untersuchungen bzw. bei fehlenden experimentellen Ergebnissen vereinfachend zur Abschätzung verwendet werden können:

1. Näherung für quasistatische Festigkeiten:

$$\tau_{uqs} \approx \sigma_{uqs}$$

2. Näherung für dynamische Festigkeiten

$$\xi_{\tau(\dot{\gamma})} = \frac{\tau_{u\,dyn}}{\tau_{uqs}} \quad ; \quad \xi_{\sigma(\dot{\varepsilon})} = \frac{\sigma_{u\,dyn}}{\sigma_{uqs}}$$

3. Näherung für numerische Berechnung von Crashbeanspruchung

$$\xi_{\tau} = \xi_{\sigma} = \xi . \quad (11.18)$$

Mit diesen Näherungen können bei Kenntnis des quasistatischen Spannung - Verformung - Zusammenhangs, etwa durch Zugversuche mit der dicken Zugscherprobe die fehlenden Kenngrößen bei dynamischer Beanspruchung bestimmt werden. Legt man z. B. für ξ den Wert 2 zu Grunde (vergl. Bild 10-1), dann erhält man aus τ_{uqs} die dynamische Schubfestigkeit $\tau_{u\,dyn}$ und mit Gl. (11.18) und der 1. Näherung $\tau_{uqs} \approx \sigma_{uqs}$ die dynamische Zugfestigkeit $\sigma_{u\,dyn}$. Aus der quasistatischen Schubspannung - Gleitung - Beziehung lassen sich mit einer angenommenen elastischen Querszahl von z. B. $\nu_e = 0,35$, der Zug - Elastizitätsmodul, die Zugfließgrenze und mit der Beziehung (4.1) und folgenden die dynamischen Festigkeitskurven berechnen.

Eine Verfeinerung wird erreicht, wenn man ratenabhängige $\tau - \gamma$ - Kurven aus Schnellerreißversuchen an dicken Zugscherproben auswertet. Hieraus erhält man $\tau(\gamma, \dot{\gamma})$ und daraus $\tau_u(\dot{\gamma})$ und wegen Gl. (11.18) $\sigma_u(\dot{\gamma})$. Die weitere Bearbeitung entspricht dem vorstehenden Beispiel.

12. Deformationskriterium

Das plastische Potential [4] und die nicht assoziierte Fließregel führen zur Vergleichsgleichung Gl. (11.7). Beim Maximum erhält man daraus das ratenabhängige Kriterium

$$\gamma_{uv}^2 = 2 \varepsilon'_{ij} \varepsilon'_{ij} + \frac{1}{3a_{2u\,dyn}} \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} . \quad (12.1)$$

Ergebnisse aus experimentellen Untersuchungen an Kunststoffen zeigen, dass man die quasistatischen Querszahlen mit denjenigen, die bei dynamischer Beanspruchung ermittelt worden sind, gleichsetzen kann, so dass auch gilt:

$$\nu_{gu\,dyn} = \nu_{guqs} := \nu_{gu} . \quad (12.2)$$

Damit findet man mit Gl. (11.8)

$$a_{2uqs} = a_{2u\,dyn} = \frac{1}{2} \frac{1 - \nu_{gu}}{1 - 2\nu_{gu}} . \quad (12.3)$$

Für das stumpf geklebte Rohr erhält man aus Gln. (12.1) und (12.3)

$$\gamma_{uv}^2 = \gamma_{xy}^2 + 2 \frac{1-\nu_{gu}}{1-2\nu_{gu}} \varepsilon_{xu}^2 \quad (12.4)$$

im Gegensatz zur MISESchen „Vergleichsgleitung“, die für den untersuchten Fall

$$\gamma_v^2 = \gamma_{xy}^2 + \frac{4}{3} \varepsilon_x^2 \quad (12.5)$$

lautet.

Die Auswertung in der Tabelle 11/1 hat für die Querszahl beim Maximum den einheitlichen Wert von $\nu_{gu} = 0,49$ ergeben. Damit ergibt sich in Gl.(12.4) für den Ausdruck, der den Einfluss der Dehnung ε_x berücksichtigt, der Wert von 51 gegenüber 4/3 bei MISESscher Betrachtung.

Wegen der in [4] postulierten Annahme von der Maßgeblichkeit der Formänderungsenergiegedichte für das Fließen der betrachteten Werkstoffgruppe gilt, dass $\gamma_{uv} = \gamma_u$ für einfache Torsionsbeanspruchung des Rohrs ($\varepsilon_x = 0$) ist. Für einfache Zugbeanspruchung des Rohrs muss dann gelten

$$\varepsilon_{xu} = \varepsilon_u = \sqrt{\frac{(1-2\nu_{gu})}{2(1-\nu_{gu})}} \gamma_u \quad (12.6)$$

Die quasistatischen Untersuchungen an BETAMATE 1496 V haben ergeben: $\gamma_u = 0,9$ und $\varepsilon_u = 0,14$, die Rechnung nach Gl.(12.6) mit $\nu_{gu} = 0,49$ liefert $\varepsilon_u = 0,13$.

13. Vergleichsschubspannung – Vergleichsgleitung

Die Vergleichsschubspannung lautet gemäß Gl. (11.2)a und unter Berücksichtigung des experimentellen Befundes nach Gl.(12.2)

$$\tau_v^2 = J_2' + \frac{1}{3} a_1 (\gamma_v, \dot{\gamma}_v) \tau_v J_1 + \frac{1}{6} \frac{1-2\nu_g}{1+\nu_g} J_1^2 \quad (13.1)$$

Im Rahmen elastoplastischer Rechnungen werden jedoch elastische und plastische Anteile der Gesamtverformung einzeln bestimmt, so dass die Vergleichsspannung für den plastischen Verformungsanteil lautet:

$$\tau_v^2 = J_2' + \frac{1}{3} a_1 (\gamma_{pv}, \dot{\gamma}_{pv}) \tau_v J_1 + \frac{1}{6} \frac{1-2\nu_p}{1+\nu_p} J_1^2 \quad (13.2)$$

Die plastische Querszahl ν_p erhält man aus Gl.(8.10). Sie lautet schubbasiert

$$\nu_p = \nu_e + \frac{1}{2} (1-2\nu_e) \left[1 - \exp \left(- \frac{\gamma_{pv}}{\gamma_{pu}} \ln \frac{1-2\nu_e}{1-2\nu_{pu}} \right) \right] \quad (13.3)$$

Bei Fließbeginn für $\tau_v = \tau_F$ folgt wegen $\gamma_{pv} = 0$ für die plastische Querkzahl $\nu_p = \nu_e$, so dass Gl. (13.3) zur Fließbedingung wird. Hierzu wird jedoch die Funktion $a_1(\gamma_{pv}, \dot{\gamma}_p)$ benötigt. Da der Ordinatenabschnitt der Geraden des BELTRAMI - Diagramms durch den Schub- bzw. Torsionsversuch bekannt ist, nicht jedoch der Abszissenabschnitt, wird a_1 durch den Zugversuch am stumpf geklebten Rohr bestimmt. Wegen der Querdehnungsbehinderung der dünnen Klebschicht (SCHLIMMER 1982 [2]) lauten die dort herrschenden Normalspannungen bei Gesamtdeformation:

$$\sigma_x, \sigma_y = \sigma_z = \frac{\nu_g}{1-\nu_g} \sigma_x = \frac{\nu_g}{1-\nu_g} \sigma \quad (13.4)$$

und die Invarianten von Gl. (13.2) dann

$$J_2' = \frac{1}{3} \left(\frac{1-2\nu_p}{1-\nu_p} \right)^2 \sigma^2, \quad J_1 = \left(\frac{1-2\nu_p}{1-\nu_p} \right) \sigma. \quad (13.5)a,b$$

Für den einfachen Torsions- oder Schubversuch ergibt sich aus Gl. (13.2)

$$\tau_v = \tau_{xy} = \tau \quad (13.6)$$

und mit den Gln. (13.5)a,b findet man

$$\frac{1}{3} a_1 = \frac{1-\nu_p}{1+\nu_p} \left(\frac{\tau}{\sigma} \right) - \frac{1}{2} \frac{1-3\nu_p+2\nu_p^2}{(1+\nu_p)(1-\nu_p)} \left(\frac{\sigma}{\tau} \right). \quad (13.7)$$

Für den Fließbeginn erhält man mit

$$\frac{\tau}{\sigma} = \frac{\tau_F}{\sigma_F} \quad (13.8),a$$

und $\nu_p = \nu_e$ die Steigung a_{1F} der BELTRAMI - Geraden und beim Maximum mit

$$\frac{\tau}{\sigma} = \frac{\tau_u}{\sigma_u} \quad (13.8),b$$

und $\nu_p = \nu_{pu}$ die Steigung a_{1u} . Für die Näherung $\tau_u = \sigma_u$ und die plastische Querkzahl $\nu_{pu} = 0,49$ liefert Gl. (13.7) für a_{1u} ungefähr den numerischen Wert 1,01. Für den Fließbeginn mit $\tau_F = \sigma_F$ und $\nu_e = 0,35$ erhält man 1,11 so dass für das Beispiel r ein Mittelwert $a_1 \approx 1,05$ gesetzt werden kann, was isotrope Verfestigung bedeutet.

Im Allgemeinen ändert sich aber a_1 mit der Verfestigung vom Fließbeginn bis zum Maximum (kinematische Verfestigung), so dass man auf die Spannung - Deformationsbeziehungen von Ziff. 7 zurückgreifen muss. Mit den Gln. (6.11) und (7.7) lautet der Quotient τ/σ :

$$\frac{\tau}{\sigma} = \frac{\tau_F + (\tau_u - \tau_F) \cdot \frac{1 - \exp(-d_\gamma \gamma_p)}{1 - \exp(-d_\gamma \gamma_{pu})} \cdot \exp\left[\frac{-d_\gamma (\gamma_p - \gamma_{pu})}{\exp(d_\gamma \gamma_{pu}) - 1}\right]}{\sigma_F + (\sigma_u - \sigma_F) \cdot \frac{1 - \exp(-d_\varepsilon \varepsilon_p)}{1 - \exp(-d_\varepsilon \varepsilon_{pu})} \cdot \exp\left[\frac{-d_\varepsilon (\varepsilon_p - \varepsilon_{pu})}{\exp(d_\varepsilon \varepsilon_{pu}) - 1}\right]}. \quad (13.9)$$

Statt Gl. (13.9) wird zur Vereinfachung das Spannungsverhältnis in Abhängigkeit von der plastischen Vergleichsgleitung mit dem Schädigungskoeffizienten δ angesetzt:

$$\frac{\tau}{\sigma} = \left(\frac{\tau_F}{\sigma_F} \right) + \left(\frac{\tau_u}{\sigma_u} - \frac{\tau_F}{\sigma_F} \right) \frac{1 - \exp(-\delta \gamma_{pv})}{1 - \exp(-\delta \gamma_{pu})} \exp \left[\frac{-\delta (\gamma_{pv} - \gamma_{pu})}{\exp(\delta \gamma_{pu}) - 1} \right]. \quad (13.10)$$

Für $\gamma_{pu} = 0$ bei Fließbeginn erhält man Gl. (13.8)a und für $\gamma_{pv} = \gamma_{pu}$ Gl. (13.8),b.

Die plastische Vergleichsgleitung folgt aus Gl. (11.7) zu:

$$\gamma_{pv}^2 = 2^P \varepsilon'_{ij}{}^P \varepsilon'_{ij}{}^P + \frac{1}{3a_2(\gamma_{pv})} \varepsilon_{ii}{}^P \varepsilon_{jj}{}^P \quad (13.11)$$

mit

$$a_2(\gamma_{pv}) = \frac{1}{2} \frac{1 - 2\nu_p}{1 + \nu_p} \quad (13.12)$$

und ν_p gemäß Gl. (13.3).

Durch die Gln. (13.2), (13.3), (13.7), (13.10), (13.11) und (13.12) wird der Vergleichsspannungszustand für jede kombinierte Beanspruchung bestimmt, jedoch nur durch eine iterativen Lösung.

Für die dynamische Beanspruchung gelten diese Gleichungen ebenfalls, denn die erforderlichen Kennwerte

$$\tau_F, \sigma_F; \tau_u, \sigma_u; \gamma_{pu}; \nu_e, \nu_{pu}$$

können in Abhängigkeit von der Deformationsrate bzw. Belastungsgeschwindigkeit bestimmt werden.

Dazu greift man auf Gl. (9.10) zurück und erhält für die Quotienten

$$\frac{\tau_F}{\sigma_F} = \frac{\tau_{F dyn}}{\sigma_{F dyn}} = \frac{\tau_{F qs}}{\sigma_{F qs}} \frac{1 + N_{\tau_F} \ln \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_{qs}}}{1 + N_{\sigma_F} \ln \frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_{qs}}} \quad (13.13)$$

und

$$\frac{\tau_u}{\sigma_u} = \frac{\tau_{u dyn}}{\sigma_{u dyn}} = \frac{\tau_{u qs}}{\sigma_{u qs}} \frac{1 + N_{\tau_u} \ln \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_{qs}}}{1 + N_{\sigma_u} \ln \frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_{qs}}}. \quad (13.14)$$

Experimentell müssen die Kennwertverhältnisse bei gleich großen „Vergleichsdehnraten“ bestimmt werden. Dazu liefert die Fließregel und das nicht assoziierte Potential [4] statt Gl. (13.11)

$$\dot{\gamma}_{pv}^2 = 2^P \dot{\varepsilon}'_{ij}{}^P \dot{\varepsilon}'_{ij}{}^P + \frac{1}{3a_2} \dot{\varepsilon}_{ii}{}^P \dot{\varepsilon}_{jj}{}^P. \quad (13.15)$$

Entsprechend Gl. (11.10) erhält man dann für die kombinierte Rohrbeanspruchung

$$\dot{\gamma}_{pv}^2 = \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{3a_2} \right)^P \dot{\epsilon}_x^2 + {}^P \dot{\gamma}_{xy}^2$$

und wegen $\dot{\gamma}_{pv} = \dot{\gamma}_p$ für den Zusammenhang zwischen Torsion- und Zugbeanspruchung

$$\dot{\gamma}_{pv} = \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{3a_2} \right) \dot{\epsilon}_p. \quad (13.16)$$

Der Klammerausdruck in Gl. (13.16) folgt aus Gl. (13.12), so dass das Deformationsraten-Verhältnis lautet

$$\dot{D}_R = \frac{\dot{\epsilon}_p}{\dot{\gamma}_p} = \sqrt{\frac{1-2\nu_p}{2(1-2\nu_p)}}. \quad (13.17)$$

Die plastische Querszahl ν_p in Gl. (13.17) ist gemäß Gl. (13.3) nur von der plastischen Vergleichsgleitung abhängig. Bei Fließbeginn liefert Gl. (13.3) für

$$\tau = \tau_F : \nu_p = \nu_e, \quad \text{z.B. } \nu_e = 0,33$$

und beim Maximum

$$\tau = \tau_u : \nu_p = \nu_{pu}, \quad \text{z.B. } \nu_{pu} = 0,49.$$

Mit diesem Zahlenbeispiel ergibt sich aus Gl. (13.17)

$$\nu_p = 0,33 : \dot{D}_R = 0,50,$$

$$\nu_p = 0,49 : \dot{D}_R = 0,14.$$

Bisherige Versuche wurden mit $\dot{\gamma} = konst.$ und $\dot{\epsilon} = \dot{\gamma}/2 = konst.$ gefahren, was dem berechneten Verhältnis bei Fließbeginn entspricht. Mit der Verfestigung gemäß Gl. (13.3) müsste \dot{D}_R kleiner werden und sich gegen null nähern. Versuche sollen zeigen, ob Unterschiede im Spannung – Dehnung - Verlauf zu erkennen sind, wenn beide Verhältnisse des Beispiels untersucht werden. Falls keine signifikanten Unterschiede auftreten, kann \dot{D}_R als konstante Größe eingeführt werden, z.B. $\dot{D} = 0,5$.

Da die Querszahl als ratenunabhängig angenommen wird, folgt für konstantes \dot{D}_R :

$$\frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_{qs}} = \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_{qs}}. \quad (13.18)$$

Damit lassen sich die Spannungsquotienten der Gl. (13.13) auch einfacher ausdrücken:

$$\frac{\tau_{F\,dyn}}{\sigma_{F\,dyn}} = \frac{\tau_{F\,qs}}{\sigma_{F\,qs}} \left(1 + N_F \ln \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_{qs}} \right) \quad (13.19),a$$

$$\frac{\tau_{u\,dyn}}{\sigma_{u\,dny}} = \frac{\tau_{u\,qs}}{\sigma_{u\,qs}} \left(1 + N_u \ln \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_{qs}} \right) \quad (13.19),b$$

Die Differenz aus beiden Gln. ergibt

$$\frac{\tau_{u\,dyn}}{\sigma_{u\,dny}} - \frac{\tau_{F\,dyn}}{\sigma_{F\,dny}} = \left(\frac{\tau_{u\,qs}}{\sigma_{u\,qs}} - \frac{\tau_{F\,qs}}{\sigma_{F\,qs}} \right) + \left(\frac{\tau_{u\,qs}}{\sigma_{u\,qs}} N_u - \frac{\tau_{F\,qs}}{\sigma_{F\,qs}} N_F \right) \left(\ln \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_{qs}} \right). \quad (13.20)$$

Wird experimentell bestätigt, dass

$$N_u = N_F = N,$$

dann vereinfacht sich die Differenz zu

$$\frac{\tau_{u\,dyn}}{\sigma_{u\,dny}} - \frac{\tau_{F\,dyn}}{\sigma_{F\,dny}} = \left(\frac{\tau_{u\,qs}}{\sigma_{u\,qs}} - \frac{\tau_{F\,qs}}{\sigma_{F\,qs}} \right) \left(1 + N \ln \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_{qs}} \right). \quad (13.21)$$

Mit Gl. (13.21) erhält man aus Gl. (13.10) das ratenabhängige Spannungsverhältnis τ/σ zur Bestimmung des ratenabhängigen Koeffizienten a_1 in der Vergleichspannung Gl. (13.2) zu:

$$\left(\frac{\tau}{\sigma} \right)_{dyn} = \left[\left(\frac{\tau_F}{\sigma_F} \right)_{qs} + \left(\frac{\tau_u}{\sigma_u} - \frac{\tau_F}{\sigma_F} \right)_{qs} \frac{1 - \exp(-\delta \gamma_{Pv})}{1 - \exp(-\delta \gamma_{Pu})} \exp \left(\frac{-\delta (\gamma_{Pv} - \gamma_{Pu})}{\exp(\delta \gamma_{Pu}) - 1} \right) \right] \left(1 + N \ln \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_{qs}} \right). \quad (13.22)$$

In Gl. (13.22) soll der Schädigungsparameter δ als ratenunabhängig angenommen werden und die plastischen Gleichung γ_{Pu} beim Maximum im Allgemeinen als ratenabhängig:

$$\gamma_{Pu} = \gamma_{Pu} \left(\frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_{qs}} \right). \quad (13.23)$$

Damit sind die für die numerische Berechnung von Spannungs – und Deformationszuständen notwendigen Stoffgleichungen einerseits und ratenabhängigen Anstrengungskriterien andererseits aus experimentellen und synthetischen Kennwerten bestimmt.

14. Plastische Vergleichsdehnung bei Bruch - Vergleich mit dem JOHNSON-COOK-Modell

Bei der Berechnung von ratenabhängigen Verformungszuständen wird zur Erfassung des Versagens bei mehrachsiger Beanspruchung gerne auf den für metallische Werkstoffe von JOHNSON und COOK [7] aufgestellten Ansatz für die „äquivalente Versagensdehnung“ ε^f zurück gegriffen, der lautet

$$\varepsilon^f = \left[D_1 + D_2 \exp D_3 \sigma^* \right] \left[1 + D_4 \ln \dot{\varepsilon}^* \right] \left[1 + D_5 T^* \right], \quad (14.1)$$

$$\sigma^* = \frac{\sigma_m}{\sigma}, \quad \sigma_m = \frac{1}{3} J_1, \quad \bar{\sigma} = \sqrt{3 J_2} \quad (MISES).$$

Die 1. Klammer in Gl. (14.1) entspricht dem Ansatz von HANCOCK und MACKENZIE (1976 H-M-Modell [7]).

Üblicherweise wird die Vergleichsdehnung als Funktion der Koordinaten des Deformationstensors bzw. -deviators angegeben. Für das hier behandelte Modell lautet diese für die plastischen Anteile und ausgerichtet auf den Schubversuch:

$$\gamma_{pv}^2 = 2 \, {}^p \varepsilon'_{ij} \, {}^p \varepsilon'_{ij} + \frac{1}{3a_2(\gamma_{pv})} \, {}^p \varepsilon_{ii} \, {}^p \varepsilon_{jj} \quad (14.2a)$$

mit

$$a_2 = \frac{1}{2} \frac{1 - 2\nu_p}{1 + \nu_p}. \quad (14.2b)$$

Die plastische Vergleichsdehnung bei Bruch bzw. bei Spannungsmaximum, als dem Punkt des Versagensbeginns, z. B. erster Anriss, folgt aus der Gl. (14.2 a, b) durch Einsetzen der entsprechenden plastischen Verformungen bei Bruch und der dazugehörigen plastischen Querszahl bei Bruch.

Der HANCOCK-MACKENZIE-Ansatz gilt für zähes Versagen (ductile failure) und wurde von JOHNSON und COOK für gekerbte und ungekerbte Zugstäbe aus metallischen Werkstoffen untersucht, bei denen vor Bruch des Restquerschnitts sich Einschnürung der Probenstäbe einstellt.

Kleberverbindungen mit zähen Klebstoffen zeigen dagegen ein anderes Verhalten, wenn der Klebstoff sich als dünne Schicht zwischen „starren“ Fügeteilen befindet (dicke Zugscherprobe, Rohrprobe).

Experimentell bestimmbar sind bei den Grunduntersuchungen an diesen Proben die Beanspruchungsmaxima τ_u, σ_u und die dazu gehörigen Verformungen γ_u, ε_u . Das Nachfestigkeitsverhalten ist mit diesen Proben bisher experimentell noch nicht untersucht worden und mit hoher Wahrscheinlichkeit auch experimentell nicht zugänglich.

Hier müssen vielmehr bruchmechanische Untersuchungen beginnen. Deshalb wird zum Vergleich mit dem H-M-Modell das Versagen bzw. der Versagensbeginn mit dem Höchstlastpunkt (τ_u/γ_u) bzw. (σ_u/ε_u) festgelegt.

Die plastische Vergleichsgleitung bei Höchstlast lautet dann:

$${}^p \gamma_{vu}^2 = 2 \, {}^p \varepsilon'_{iju} \, {}^p \varepsilon'_{iju} + \frac{2}{3} \frac{1 + \nu_{pu}}{1 - \nu_{pu}} \, {}^p \varepsilon_{iii} \, {}^p \varepsilon_{jjj}. \quad (14.3)$$

Im H-M-Modell (14.1) führen unterschiedliche Spannungszustände, dargestellt durch das Spannungsinvariantenverhältnis (pressure – stress - ratio) $\sigma_m/\bar{\sigma}$ zu unterschiedlichen „äquivalenten“ plastischen Dehnungen. Im Gegensatz dazu ergeben die verschiedenen Deformationszustände bei Höchstlast ein und die gleiche plastische Vergleichsgleitung.

Für einen direkten Vergleich von Gl. (14.3) mit dem H-M-Modell muss Gl. (14.3) in Abhängigkeit von der Vergleichsspannung dargestellt werden. Dazu geht man von Gl. (41) in [4] aus:

$$d \, {}^p \varepsilon_{ij} = \left(\frac{1}{2} \sigma'_{ij} + \frac{1}{3} a_2 \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) \frac{d \, {}^p \gamma_v}{\tau_v}. \quad (14.4)$$

Für die weitere Betrachtung wird über die Theorie der Gesamtdeformation (Deformationstheorie und Erweiterung auf Gesamtdeformation, s. Ziff. 11, Gl. 11.4) ausgegangen. Die Ergebnisse gelten formal auch für die plastischen Anteile der Verformung.

Aus Gl. (14.4) folgt damit für den Verzerrungsdeviator:

$${}^p \varepsilon'_{ij} = \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \left(\frac{{}^p \gamma_v}{\tau_v} \right) \quad (14.5a)$$

bzw.

$$\varepsilon'_{ij} = \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \left(\frac{\gamma_v}{\tau_v} \right). \quad (14.5b)$$

Durch Überschieben ergibt sich

$$\varepsilon'_{ij} \varepsilon'_{ij} = \frac{1}{4} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} \left(\frac{\gamma_v}{\tau_v} \right)^2 \quad (14.6)$$

und daraus folgt die Vergleichsgleichung zu

$$\gamma_v^2 = 2 \varepsilon'_{ij} \varepsilon'_{ij} \frac{\tau_v^2}{\frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}} = 2 \varepsilon'_{ij} \varepsilon'_{ij} \frac{\tau_v^2}{J_2'} \quad (14.7)$$

Einsetzen der Vergleichsschubspannung nach Gl. (11.2a) liefert für die 2. Invariante des Deformationsdeviators ε'_{ij}

$$2 \varepsilon'_{ij} \varepsilon'_{ij} = \frac{\gamma_v^2}{1 + a_1 \tau_v \frac{J_1}{J_2'} + \frac{1}{6} \frac{1-2\nu}{1+\nu} \frac{J_1^2}{J_2'^2}} \quad (14.8)$$

Die linke Seite von Gl. (14.8) wird in der MISESschen Theorie als plastische Vergleichsdehnung aufgefasst, so dass sie hier ebenfalls als eine äquivalente Deformation eingeführt werden kann:

$$\gamma_{eq}^2 = 2 \varepsilon'_{ij} \varepsilon'_{ij}. \quad (14.9)$$

Für den plastischen Verformungsanteil ist γ_{eq} in Gl. (14.9) vergleichbar mit ε^f in Gl. (14.1).

Aus den Gln. (14.8) und (14.9) folgt

$$\frac{\gamma_{eq}}{\gamma_v} = \left[1 + a_1 \tau_v \frac{J_1}{J_2'} + \frac{1}{6} \frac{1-2\nu}{1+\nu} \frac{J_1^2}{J_2'^2} \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (14.10)$$

Zum Vergleich mit Gl. (14.1) wird Gl. (14.10) als Versagensmodell bei Höchstlast untersucht und man setzt ein

$$\gamma_v = \gamma_u, \quad \tau_v = \tau_u, \quad \nu = \nu_u \quad (14.11a,b)$$

und erhält:

$$\frac{\gamma_{equ}}{\gamma_u} = \left[1 + a_{1u} \tau_u \frac{J_1}{J_2'} + \frac{1}{6} \frac{1-2\nu_u}{1+\nu_u} \frac{J_1^2}{J_2'^2} \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (14.12)$$

Das aus der konsistenten Materialtheorie für Klebschichten folgende Versagensmodell nach Gl. (14.12) benötigt keine zusätzlichen Ansatzfreiwerte und Annahmen wie das H-M-Modell, sondern kann durch die experimentell ermittelten Klebschichtkennwerte erfüllt werden. Der sog. Mehrachsigen Grad σ^* in Gl. (14.1) folgt zwangsläufig aus der Grundtheorie des plastischen Potentials /4/.

Die Anwendung von Gl. (14.12) für den einachsigen Zugversuch an einer Klebstoffsubstanzprobe ($\sigma_x = \sigma_{xu}, 0, 0$) ergibt

$$\frac{\gamma_{equ}}{\gamma_u} = \left[1 + 3a_{1u} \frac{\tau_u}{\sigma_{xu}} + \frac{1}{2} \frac{1-2\nu_u}{1+\nu_u} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (14.13)$$

Mit Gl. (13.7) für a_1 , einer plastischen Querszahl von $\nu_p = 0,49$, der Näherung $\tau_u = \sigma_u$ und $\sigma_{xu} = \sigma_u$ erhält man aus Gl. (14.13)

$$\nu = 0,49 : \gamma_{equ} \approx 0,5 \gamma_u .$$

Wegen der Klebschicht- bzw. Klebstoffstruktur werden im Zugversuch an der Substanzprobe (z. B. BETAMATE 1496) mit der Längsdehnung abnehmende Querszahlen gemessen. Eine Rechnung mit $\nu = 0,35$ und $\nu = 0$ ergeben:

$$\nu = 0,35 : \gamma_{equ} \approx 0,44 \gamma_u$$

$$\nu = 0 : \gamma_{equ} \approx 0,41 \gamma_u ,$$

das bedeutet, dass die Dehnungen bei Höchstlast etwa zwischen 40 und 50 % der Gleitung bei Höchstlast liegen.

Für den Zugversuch am stumpfgeklebten Rohr mit $(\sigma_x = \sigma_u, \sigma_y, \sigma_z)$ und behinderter Querdehnung ($\varepsilon_x = \varepsilon_u, 0, 0$) erhält man aus Gl. (14.12)

$$\frac{\gamma_{equ}}{\gamma_u} = \left[1 + 3a_{1u} \frac{(1+\nu_u)(1-2\nu_u)}{(1-2\nu_u)^2} \frac{\tau_u}{\sigma_u} + \frac{1}{2} \frac{1+\nu_u}{1-2\nu_u} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (14.14)$$

Mit denselben Annahmen $\nu_u = 0,49$ und $\sigma_u = \tau_u$ ergibt sich daraus

$$\frac{\gamma_{equ}}{\gamma_u} = \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{1-2\nu_u}{\sqrt{1-2\nu_u}} \quad (14.15)$$

und für

$$\nu_u = 0,49 : \gamma_{equ} = 0,013 \gamma_u .$$

Das konsistente Materialmodell liefert somit ohne weitere Ansätze ein von der Mehrachsigen abhängiges „Versagensmodell“, für das keine weiteren Ansatzfreiwerte identifiziert werden müssen.

Die Abhängigkeit der äquivalenten Gleitung bei Höchstlast von der Deformationsrate folgt aus der Ratenabhängigkeit der Kennwerte (Ziff. 9)

$$\tau_u = \tau_u \left(\dot{\gamma} / \dot{\gamma}_{qs} \right), \quad (14.16)a$$

$$\gamma_u = \gamma_u \left(\dot{\gamma} / \dot{\gamma}_{qs} \right). \quad (14.16)b$$

Die Querzahl ν_u soll (Ziff. 11) unabhängig von der Deformationsrate sein. Die Ratenabhängigkeit der Kennwerte nach Gln. (14.16 a, b) kann nur experimentell gefunden werden und z. B. nach dem Ansatz (9.10) ausgewertet werden:

$$\frac{(\tau_u)_{dyn}}{(\tau_u)_{qs}} = 1 + N_{\tau u} \ln \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_{qs}}, \quad (14.17)a$$

$$\frac{(\tau_u)_{dyn}}{(\tau_u)_{qs}} = 1 + N_{\gamma u} \ln \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_{qs}}. \quad (14.17)b$$

Alternativ dazu können auch Potenzansätze verwendet werden, statt Gl (14.17 a):

$$\frac{(\tau_u)_{dyn}}{(\tau_u)_{qs}} = 1 + M_{\tau u} \left(\frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_{qs}} \right)^m. \quad (14.18)$$

D Literatur

- 1 Schlimmer 1974, Fließverhalten plastisch kompressibler Werkstoffe, Dr.-Ing. Dissertation, RWTH Aachen
- 2 Schlimmer 1982, Anstrengungshypothese für Metallklebverbindungen, Werkstofftechnik 13 (1982) S. 215-221
- 3 Schlimmer 1986, Formulierung des Klebstoffverhaltens im Zugversuch mit Berücksichtigung der Schädigung, Schweißen und Schneiden 38 (1986) 11, S. 545-550
- 4 Schlimmer 2003, Grundlagen zur Berechnung des mechanischen Verhaltens von strukturellen Klebverbindungen des Fahrzeugbaus, 10. Paderborner Symposium Füge-technik, LWF-Paderborn 2003
- 5 Lemaitre/Chaboche 1990, Mechanics of solid materials, Cambridge University Press 1990
- 6 Sato/Jkegami 1999, Strength of adhesively – bonded butt joints of feebees subjected to combined highrate loads, J-Adhesion 70 (1999) S.57-73
- 7 Johnson/Cook 1985, Fracture characteristics of three metals subjected to various strains, strain rates, temperatures and pressures, Eng. Fract. Mech 21,S 31-48

