

Infotag: Akustik und NVH-Analyse mit FEM und BEM

Basic Relations in Computational Acoustics

Prof. Dr.-Ing. Marcus Wagner
Fakultät Maschinenbau
Ostbayerische Technische Hochschule
Regensburg

Infotag: Akustik und NVH-Analyse mit FEM und BEM

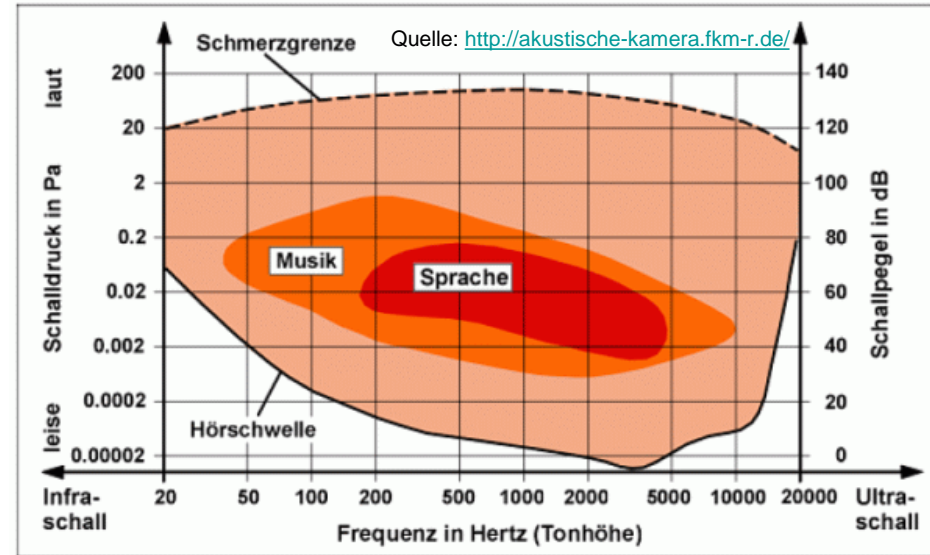
1) Basic Physical Relations

Prof. Dr.-Ing. Marcus Wagner
Fakultät Maschinenbau
Ostbayerische Technische Hochschule
Regensburg

Akustik:

Wissenschaft von der Entstehung und Ausbreitung von Schall und der Wechselwirkung mit Körpern.

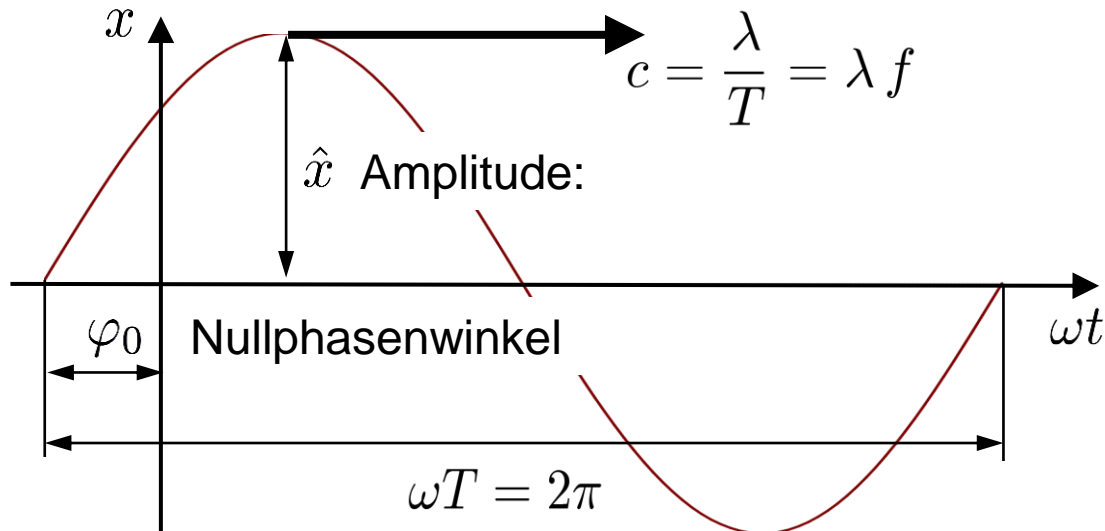
Als Teilgebiet der Mechanik befasst sich die Akustik mit Schwingungen von 16Hz bis 20kHz.



Schall:

- **Physikalisch** geht es um die wellenförmige Ausbreitung von Druck- bzw. Dichteschwankungen in einem elastischen Medium (Gas, Flüssigkeit, Festkörper)
- **Physiologisch** ist Schall ein Geräusch, das vom menschlichen Gehör empfangen und im Gehirn verarbeitet wird.

Grundbegriffe bei Wellen und Schwingungen



Schwingungsdauer T

Wellenlänge λ

Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$

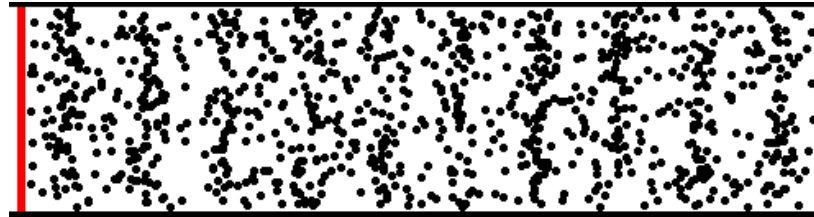
Kreiswellenzahl $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$

Die Druckschwankung breitet sich mit der Schallgeschwindigkeit c im Medium aus:

$$c = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}}$$

Medium	c in m/s	λ in m bei 1kHz
Luft (bei 20 °C)	343	0,343
Wasser	1480	1,48
Stahl	5920	5,92

Gase können keine Schubspannungen übertragen. Deshalb sind Schallwellen in Luft immer Longitudinalwellen:



Animation courtesy of Dr. Dan Russell,
Grad. Prog. Acoustics, Penn State

Durch eine Anregung wird die Dichte und damit der Druck des Mediums geändert. Diese Anregung pflanzt sich durch das Medium fort.

Die Schallwelle breitet sich kugelförmig im Raum von einer Punktschallquelle aus.

Größe	Beschreibung	Zahlenwert
Ruhedichte ρ_0	statische Dichte von z.B. Luft	1,189 kg/m ³
Ruhedruck p_0	atmosphärischer Druck	10 ⁵ Pa
Schallwechseldruck p	Dem Ruhedruck überlagerter schwingender Anteil, der das akustische Signal am Ohr verursacht.	2*10 ⁻⁵ Pa bis 20 Pa
Schallschnelle \vec{v}	Geschwindigkeit der Teilchen um ihre Ruhelage	5*10 ⁻⁸ m/s bis 5*10 ⁻² m/s

Der hörbare Bereich des Schallwechseldruckes umfasst mehrere Zehnerpotenzen.

- Angabe in Pascal auf linearer Skala unübersichtlich.
- Einführung eines logarithmischen Maßes, das auf einen Bezugsdruck referenziert wird.
- Der **Schalldruckpegel** ist definiert als:

$$L_p = 20 \log_{10} \left(\frac{p}{p_0} \right) \text{dB}, \quad p_0 = 20 \mu\text{Pa}$$

Bezugsgröße p_0 : Hörschwelle des menschlichen Gehörs bei der Frequenz 1 kHz.

Angegeben wird der Schalldruckpegel in **Dezibel [dB]**.

Aus Massenerhaltung

$$\dot{\rho} + \rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$

Impulsbilanz (Eulergleichung)

$$\rho_0 \dot{v}_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0$$

Schallgeschwindigkeit

$$c = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}}$$

folgt die lineare hyperbolische Wellengleichung für den Schallwechseldruck:

- Indexnotation

$$p_{,ii} - \frac{1}{c^2} \ddot{p} = 0$$

- Tensornotation

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \ddot{p} = 0$$

- Ausgeschrieben

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \ddot{p} = 0$$

Annahme: Vorgänge laufen nach harmonischen Funktionen ab.

$$p(t, x) = p_0 \cos(kx - \omega t)$$

Komplexwertige Darstellung über Eulersche Gleichung

$$\cos(a) + i \sin(a) = e^{ia}$$

Separationsansatz, der rein ortsabhängige und rein zeitabhängige Funktionen multiplikativ verknüpft

$$p(t, x) = p_0 e^{i(kx - \omega t)} = p_0 e^{ikx} e^{-i\omega t} = \hat{p}(x) e^{-i\omega t}$$

Helmholtz-Gleichung für den Schallwechseldruck im Frequenzbereich

$$\hat{p}_{,ii} + k^2 \hat{p} = 0$$

Skalare elliptische partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

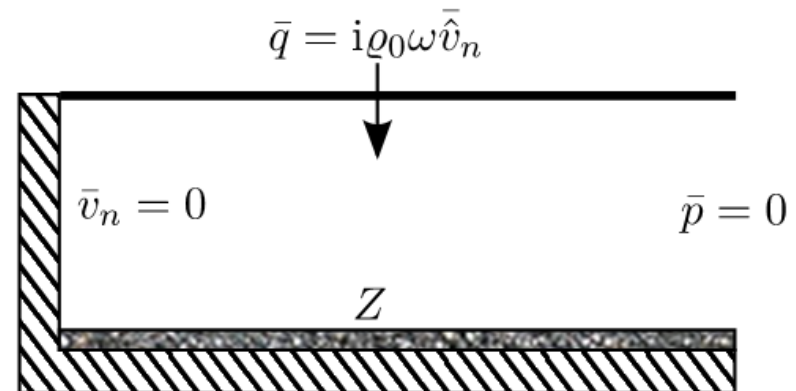
Zur vollständigen Beschreibung eines Anfangs-Randwert-Problems sind noch die Randbedingungen zu definieren:

Der Rand Γ des Gebietes Ω wird aufgeteilt in

$$\Gamma = \Gamma_p \cup \Gamma_v \cup \Gamma_Z$$

1) wesentliche Randbedingung

$$p(x, t) \Big|_{x \in \Gamma_p} = \bar{p}(t)$$



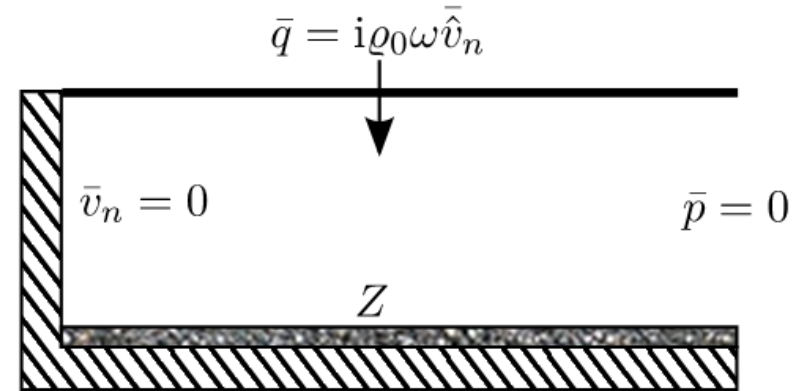
Sonderfall $\bar{p}(t) = 0$: **Schallweich**, z.B. an einer Öffnung erfolgt keine Reflektion (Beachte, p ist dem Ruhedruck überlagert)

2) natürliche Randbedingung:

Akustischer Fluss:

Normalenableitung des Wechseldruckes

$$q(x, t) \Big|_{x \in \Gamma_p} = \frac{\partial p}{\partial x_i} n_i = \frac{\partial p}{\partial n} = \bar{q}(t)$$



Im **Frequenzbereich** ist dies proportional zur **Schnelle in Normalenrichtung**

$$\hat{q} = \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_i} n_i = i\rho_0\omega\hat{v}_i n_i = i\rho_0\omega\hat{v}_n$$

Sonderfall $\hat{v}_n = 0$: **Schallharter Rand**: Vollständige Reflektion

3) **Akustische Impedanz** im Frequenzbereich:
Widerstand gegen die Ausbreitung von
Schwingungen:

$$Z = \frac{\hat{p}}{\hat{v}_n}$$

Mit dieser Randbedingung lassen sich

- Steifigkeit,
- Trägheit,
- dämpfende Eigenschaften

von Oberflächen modellieren.

Beispiele:

schallhart: Vollständige Reflektion

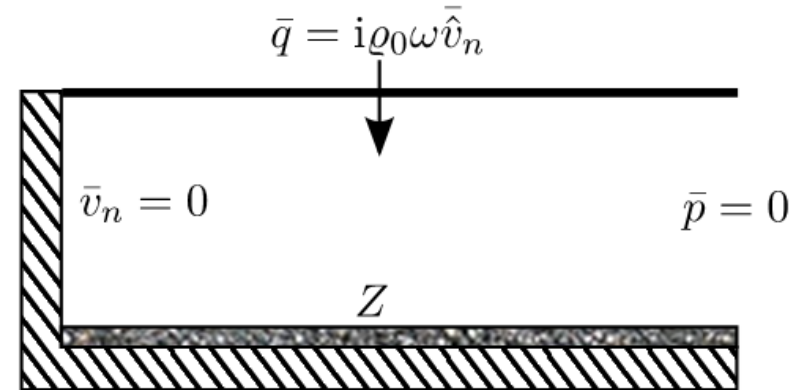
$$Z \rightarrow \infty$$

schallweich: Offener Rand:

$$Z \rightarrow 0$$

Speziell: **Charakteristische Schallimpedanz**: Impedanz einer planaren Welle,
Materialkonstante:

$$Z_0 = \rho_0 c$$

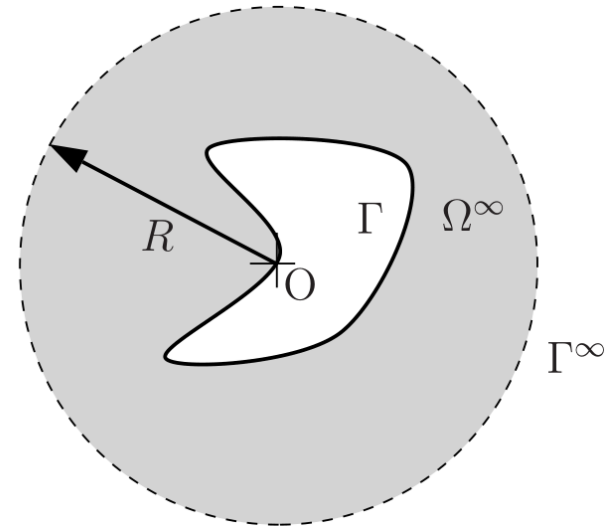


Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung: Im Fernfeld darf keine Reflektion von Wellen stattfinden. Einlaufende Wellenlösungen sind physikalisch nicht sinnvoll

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left[R^{\left(\frac{D-1}{2}\right)} \left(\frac{\partial p}{\partial R} + \frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial t} \right) \right] = 0$$

Behandlung von (halb-)unendlichen Gebieten:

- Abstrahlung von Schall
- Baugrund-Struktur-Interaktion
- Geologie,



Quelle: Gaul, Kögl, Wagner

Physikalische Plausibilisierung: Die Sommerfeldsche Bedingung kann auch als Impedanzrandbedingung interpretiert werden: im Fernfeld geht die Schallwelle in eine planare Welle über, mit der Impedanz:

$$Z_\infty = \rho_0 c$$

Infotag: Akustik und NVH-Analyse mit FEM und BEM

2) Numerical Solution of the Helmholtz Equation

Prof. Dr.-Ing. Marcus Wagner
Fakultät Maschinenbau
Ostbayerische Technische Hochschule
Regensburg

Ausgehend vom **gewichteten Residuum** (Anmerkung: Alles komplexe Größen)

$$\int_{\Omega} \delta p (p_{,ii} + k^2 p) d\Omega = 0$$

Einmalige **Partielle Integration** und Anwendung des Gaußschen Integralsatzes

$$\int_{\Omega} \delta p \cdot p_{,ii} d\Omega = \int_{\Gamma} \delta p \cdot p_{,i} n_i d\Gamma - \int_{\Omega} \delta p_{,i} \cdot p_{,i} d\Omega$$

liefert die **Schwache Form der Differentialgleichung**

$$-k^2 \int_{\Omega} \delta p \cdot p d\Omega + \int_{\Omega} \delta p_{,i} \cdot p_{,i} d\Omega = \int_{\Gamma} \delta p \cdot q d\Gamma$$

mit dem akustischen Fluss

$$q = \frac{\partial p}{\partial x_i} n_i = i\rho_0\omega v_n$$

Diskretisierung des Gebietes

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^E \Omega^e$$



und Ansatzfunktionen pro Element e

$$\tilde{p}^e = \mathbf{N} \mathbf{p}^e$$

$$\tilde{p}_{,i}^e = \mathbf{N}_{,i} \mathbf{p}^e = \mathbf{B} \mathbf{p}^e$$

liefern die Matrizen

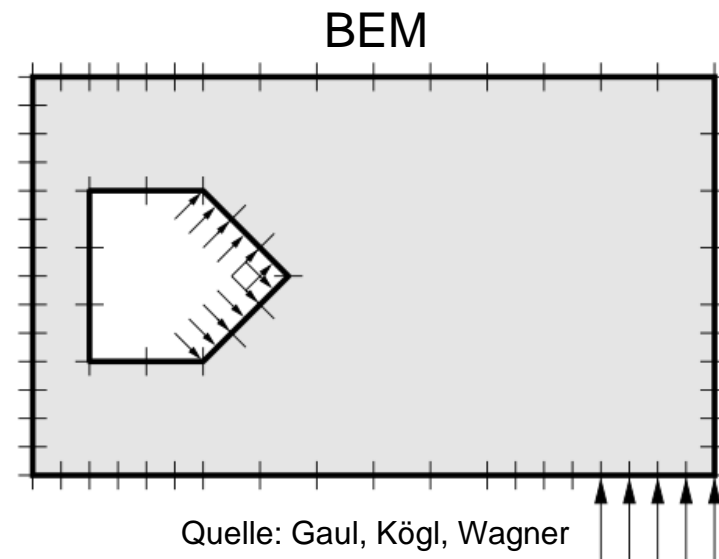
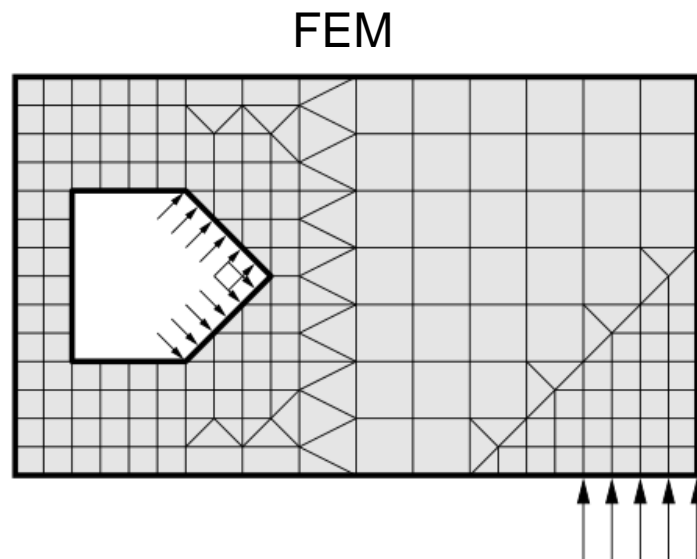
$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{B} \, d\Omega \quad \mathbf{M}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \, d\Omega \quad \mathbf{F}^e = \int_{\Gamma^e} \mathbf{N}^T \bar{q} \, d\Omega$$

und nach dem Zusammensetzen der Elementmatrizen die FE-Gleichung

$$(\mathbf{K} - k^2 \mathbf{M}) \mathbf{p} = \mathbf{F}$$

Die Randelementmethode (boundary-element method, BEM, REM) ist ein **Diskretisierungsverfahren** wie die Finite-Elemente Methode

Kennzeichnender Unterschied: Es wird **nur der Rand des betrachteten Gebietes diskretisiert**



Quelle: Gaul, Kögl, Wagner

- besonders geeignet für Probleme die mit unendlichen Gebieten zu tun haben
- Akustik für Außenraumprobleme

Die **schwache Form der Differentialgleichung** (Bezeichnung $\delta p \rightarrow p^*$)

$$-k^2 \int_{\Omega} p^* \cdot p \, d\Omega + \int_{\Omega} p^*_{,i} \cdot p_{,i} \, d\Omega = \int_{\Gamma} p^* \cdot q \, d\Gamma$$

wird **ein zweites Mal partiell integriert**

$$\int_{\Omega} (k^2 p^* + p^*_{,ii}) p \, d\Omega = \int_{\Gamma} q^* \cdot p - p^* \cdot q \, d\Gamma$$

Wesentlicher Unterschied zur FEM: Andere Wahl der Testfunktion p^*
→ **Fundamentallösung** der DGL

$$p^*_{,ii} + \kappa^2 p^* = -\Delta(x, \xi)$$

mit einer Anregung über einen Dirac-Impuls in einem unbegrenzten Gebiet.

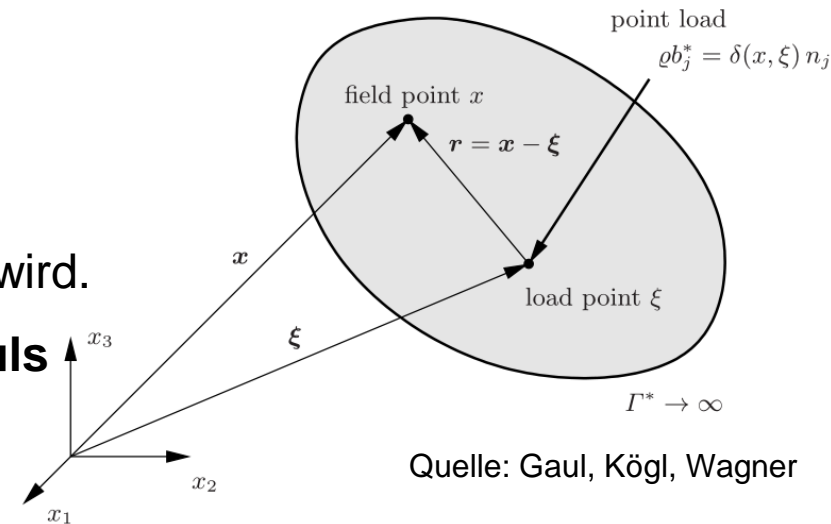
Eine Fundamentallösung für die Helmholtz-Gleichung ergibt sich aus

$$p_{,ii}^* + \kappa^2 p^* = -\Delta(x, \xi)$$

indem ein **Dirac-Impuls** als Quelle eingesetzt wird.

Wesentlich: **Filtereigenschaft des Dirac Impuls**

$$\int_{\Omega} p(x) \Delta(x, \xi) d\Omega = p(\xi)$$



Für die Akustik folgen die komplexen Funktionen

Druck
$$p^* = \frac{e^{-i\kappa r}}{4\pi r}$$

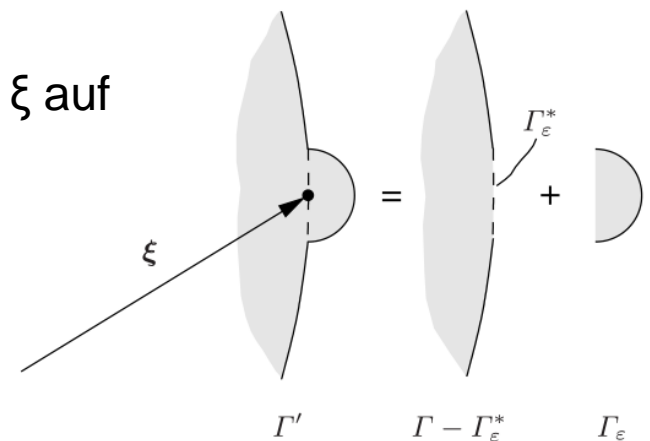
Akustischer Fluß
$$q^* = -(1 + i\kappa r) \frac{e^{-i\kappa r}}{4\pi r^2} \frac{\partial r}{\partial n}$$

Einsetzen liefert unter Ausnutzung der Filtereigenschaft die **Helmholtz-Integralgleichung**:

$$p(\xi) = \int_{\Gamma} p^* \cdot q - q^* \cdot p \, d\Gamma = \int_{\Gamma} p^*(x_i, \xi_i) \cdot i\rho_0\omega v_n(x_i) - \frac{\partial p^*(x_i, \xi_i)}{\partial n} \cdot p(x_i) \, d\Gamma$$

- Die Diskretisierung des Randes erfolgt wie bei der FEM isoparametrisch mit polynomialen Formfunktionen.
- Bei der **Kollokationsmethode** wird der Ladepunkt ξ auf die Knoten am Rand gelegt. Dies gelingt über eine **Randmodifikation** und einen Grenzwertübergang
- Es verbleibt die **Randintegralgleichung**

$$cu(\xi) + \oint_{\Gamma} q^*(x, \xi) p(x) \, d\Gamma = \int_{\Gamma} p^*(x, \xi) q(x) \, d\Gamma$$



Quelle: Gaul, Kögl, Wagner

- Für jeden Ladepunkt (→ Diskretisierungsknoten) ergibt sich eine Gleichung.
- Zusammen folgt ein unsymmetrisches, vollbesetztes Gleichungssystem zur Berechnung der unbekanntenen Randdaten

$$Hp = Gq$$

- Der Gebietsrand muss geschlossen sein.
- Die Sommerfeld-Bedingung ist automatisch enthalten → **Außenraumprobleme sind ohne Aufwand berechenbar.**
- Bei **kritischen Frequenzen im Außenraum** ist die Lösung unbestimmt. Dies kann z.B. durch die CHIEF-Methode oder Burton-Miller behoben werden.

- Andere Feldgrößen: Sprungfunktionen von Druck und akustischem Fluss.
- „Offene“ Gebiete können berechnet werden
- (schief-) Symmetrische, vollbesetzte Matrizen
- Aufstellen des Gleichungssystems nicht über Kollokation, sondern über Galerkin-Formulierung

$$\begin{bmatrix} G & -H \\ H^T & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^p \\ f^q \end{bmatrix}$$

- Hypersinguläre Integrale sind zu lösen

FEM

Vorteile:

- etablierte Methode
- Symmetrische, dünnbesetzte Matrizen, schnelle Lösung
- Zeitbereich, inhomogene und nichtlineare Problemstellungen lösbar

Nachteile:

- Außenraumprobleme nur mit Sondermethoden abbildbar (Infinite Elemente, Perfectly-Matched Layer, DtN Map)

→ FEM für Innenraumakustik

BEM

Vorteile:

- Nur Randvernetzung notwendig
- Ausstrahlungsbedingung automatisch erfüllt, deshalb für Außenraumprobleme geeignet

Nachteile:

- vollbesetzte Matrizen
- Deswegen lange Rechenzeiten, bzw. spezielle Gleichungslöser nötig.
- Zeitbereich, inhomogene und nichtlineare Problemstellungen nicht oder nur mit hohem Aufwand machbar

→ BEM für Außenraumakustik

Akustik

- Möser, M.: **Technische Akustik**, Springer, 2009
- Kollmann, et. al.: **Maschinenakustik**, Springer, 2006
- Cremer, L.; Heckl, M.: **Structure-borne sound**. Springer, 2005
- <http://www.dega-akustik.de/fachausschuesse/lehre/dokumente/wellen-und-felder/>
- <http://www.acs.psu.edu/drussell/Demos.html>

Randelementmethode

- Gaul L., Koegl. M und Wagner M.: **Boundary Element Methods for Engineers & Scientists**, Springer, 2003
- Beer, G., Smith, I., Duenser, C.: **The boundary element method with programming**, Springer, 2008
- von Estorff O., editor: **Boundary Elements in Acoustics: Advances and Applications**, WIT Press, 2000